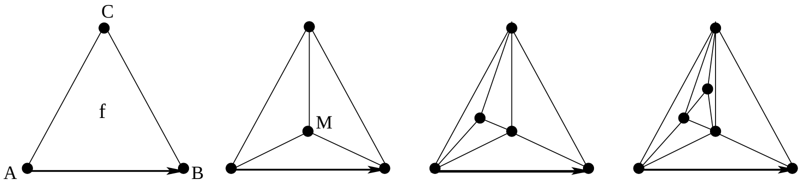
Dessins de triangulations en pile dans le plan

Thomas Selig

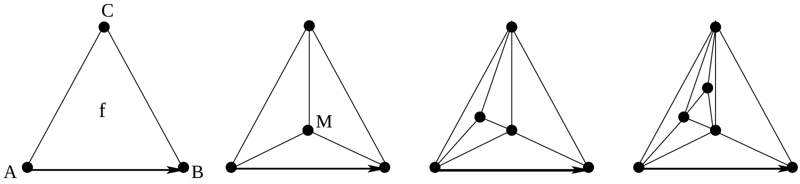
Journées ALEA 2014

20 mars 2014

Triangulations en pile

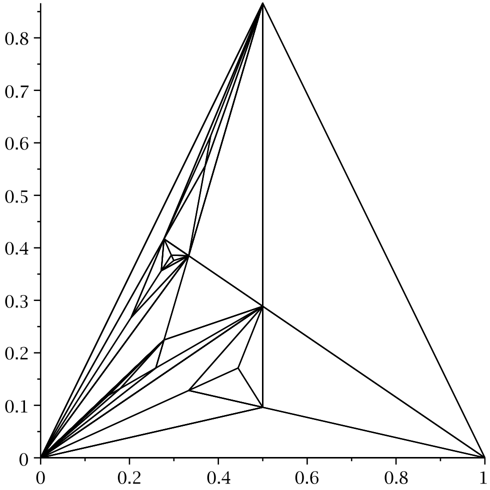


Triangulations en pile



A quoi ressemble un dessin d'un tel objet ?

Un exemple



Notations

- $\mathcal{D}_k = \{$triangulations dessinées à k sommets internes$\}$.
  $\mathcal{D} = \bigcup_k \mathcal{D}_k$.

Notations

- $\mathcal{D}_k = \{$triangulations dessinées à k sommets internes$\}$.
  $\mathcal{D} = \bigcup_k \mathcal{D}_k$.
- Pour $m \in \mathcal{D}$, $F(m) = \{$faces de $m\}$,
  $\mathcal{V}(m) = \{$sommets internes de $m\}$.

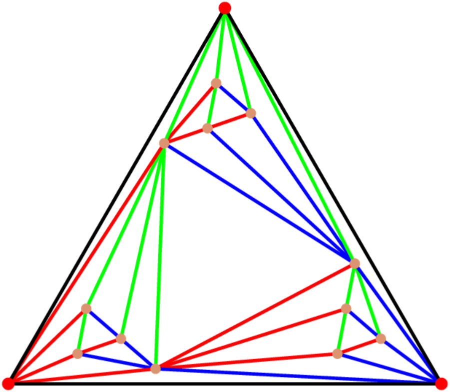
Notations

- $\mathcal{D}_k$ = {triangulations dessinées à k sommets internes}. $\mathcal{D} = \bigcup_k \mathcal{D}_k$.
- Pour $m \in \mathcal{D}$, $F(m) = \{$faces de $m\}$, $\mathcal{V}(m) = \{$sommets internes de $m\}$.
- Si $m \in \mathcal{D}$, on définit la mesure d'occupation de m par

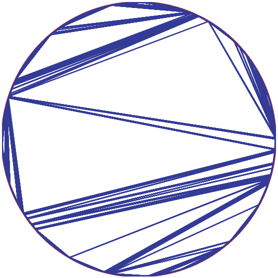
$$\mu(m) = \frac{1}{|\mathcal{V}(m)|} \sum_{x \in \mathcal{V}(m)} \delta_x.$$

Motivations

Schnyder. Embedding planar graphs on the grid.



Kortchemski et Curien. Random non-crossing plane configurations : A conditioned Galton-Watson tree approach.



Quelles notions de convergence ?

Soit une suite $(m_n \in \mathcal{D})_{n \geq 0}$.

Quelles notions de convergence ?

Soit une suite $(m_n \in \mathcal{D})_{n \geq 0}$.
Sens 1. $m_n \longrightarrow m$ quand $n \to \infty$.

Quelles notions de convergence ?

Soit une suite $(m_n \in \mathcal{D})_{n \geq 0}$.
Sens 1. $m_n \longrightarrow m$ quand $n \to \infty$.

Définition

Soit (E, d) un espace métrique. Soit X et Y deux sous-espaces compacts de E. La distance de Hausdorff de X à Y est définie par

$$d_H(X, Y) = \inf\{\varepsilon > 0; X \subseteq Y^\varepsilon \text{ et } Y \subseteq X^\epsilon\},$$

où $X^\varepsilon = \{x \in E; d(x, X) \leq \varepsilon\}$.

Quelles notions de convergence ?

Sens 2. $\mu(m_n) \longrightarrow \mu$ quand $n \to \infty$.

Quelles notions de convergence ?

Sens 2. $\mu(m_n) \longrightarrow \mu$ quand $n \to \infty$.

Définition

Soit E un espace compact, et $(\mu_n)_n, \mu$ des mesures de probabilité sur cet espace. On dit que μ_n converge étroitement vers μ si, pour toute fonction f continue sur E, on a

$$\int_E f(x) d\mu_n(x) \longrightarrow \int_E f(x) d\mu(x).$$

Deux modèles

- Modèle croissant.

Deux modèles

- Modèle croissant.
- Modèle de Catalan.

Modèle croissant : l'aléa

1$^{\text{er}}$ niveau : dans quelle face j'insère ?

A chaque étape, je choisis une face uniforme, et j'y insère un sommet.

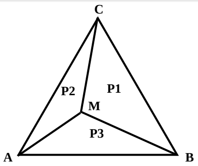
Modèle croissant : l'aléa

1^{er} niveau : dans quelle face j'insère ?

A chaque étape, je choisis une face uniforme, et j'y insère un sommet.

2^{nd} niveau : comment j'insère ?

Selon une loi de dislocation FRAG (FRAG est une distribution symétrique sur $\{(p_1, p_2, p_3);\ p_i > 0 \text{ et } \sum p_i = 1\}$).

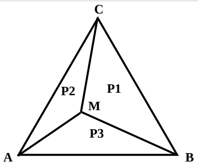


1^{er} niveau : dans quelle face j'insère ?

A chaque étape, je choisis une face uniforme, et j'y insère un sommet.

2^{nd} niveau : comment j'insère ?

Selon une loi de dislocation FRAG (FRAG est une distribution symétrique sur $\{(p_1, p_2, p_3);\ p_i > 0$ et $\sum p_i = 1\}$).



Notation

On note $\mathbb{H}_k^{\mathrm{FRAG}}$ la distribution sur $\mathcal{D}_k$ donnée par cette construction.

Modèle croissant : les résultats

Théorème

Soit m_k une suite de triangulations dessinées aléatoires, de loi $\mathbb{H}_k^{\mathrm{FRAG}}$. Alors

$$m_k \xrightarrow{p.s.} T, \quad \text{quand } k \to \infty.$$

Modèle croissant : les résultats

Théorème

Soit m_k une suite de triangulations dessinées aléatoires, de loi $\mathbb{H}_k^{\mathrm{FRAG}}$. Alors

$$m_k \xrightarrow{p.s.} T, \quad \text{quand } k \to \infty.$$

Théorème

Soit m_k une suite de triangulations dessinées aléatoires, de loi $\mathbb{H}_k^{\mathrm{FRAG}}$. Soit $\mu_k := \mu(m_k)$ leur mesure d'occupation. Alors il existe une mesure aléatoire μ_∞ telle que

$$\mu_k \xrightarrow{(d)} \mu_\infty, \quad \text{quand } k \to \infty.$$

Modèle croissant : propriétés de la mesure limite (1)

Définition

Soit M un espace métrique, et $X \subseteq M$. Pour tout $d \geq 0$, on définit la mesure de Hausdorff d-dimensionelle μ_d de X par

$$\mu_d(X) = \lim_{\varepsilon \to 0} \inf \sum_{i \in I} (\mathrm{diam}(U_i))^d,$$

où l'inf est pris sur tous les recouvrements dénombrables $(U_i)_{i \in I}$ of X tels que pour tout $i \in I$, $\mathrm{diam}(U_i) < \varepsilon$. La dimension de Hausdorff $\dim_H$ de X est alors définie par

$$\dim_H(X) = \sup\{d \geq 0; 0 < \mu_d(X) < \infty\}.$$

Modèle croissant : propriétés de la mesure limite (2)

Théorème

P.s. il n'existe pas de point x tel que $\mu_\infty(\{x\}) > 0$. De plus, μ_∞ a pour support un ensemble $S_{\mathrm{FRAG}}(\mu_\infty)$ qui vérifie

$$\dim_H(S_{\mathrm{FRAG}}(\mu_\infty)) = \frac{2}{3\mathbb{E}(-\log(P_1))} \text{ p.s.},$$

où $P = (P_1, P_2, P_3)$ suit la loi de dislocation FRAG.

Modèle croissant : propriétés de la mesure limite (2)

Théorème

P.s. il n'existe pas de point x tel que $\mu_\infty(\{x\}) > 0$. De plus, μ_∞ a pour support un ensemble $S_{\mathrm{FRAG}}(\mu_\infty)$ qui vérifie

$$\dim_H(S_{\mathrm{FRAG}}(\mu_\infty)) = \frac{2}{3\mathbb{E}(-\log(P_1))} \text{ p.s.},$$

où $P = (P_1, P_2, P_3)$ suit la loi de dislocation FRAG.

Corollaire

Cette dimension vérifie l'inégalité

$$\dim_H(S_{\mathrm{FRAG}}(\mu_\infty)) \leq \frac{2}{3\log(3)},$$

et en particulier la mesure μ_∞ est singulière par rapport à la mesure de Lebesgue.

Modèle de Catalan : l'aléa

1^er niveau : dans quelle face j'insère ?

Je choisis "d'un coup" une triangulation "combinatoire", uniforme parmi les triangulations en pile à k sommets internes.

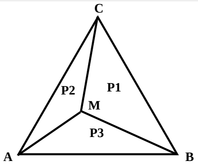
Modèle de Catalan : l'aléa

1^{er} niveau : dans quelle face j'insère ?

Je choisis "d'un coup" une triangulation "combinatoire", uniforme parmi les triangulations en pile à k sommets internes.

2^{nd} niveau : comment j'insère ?

Selon une loi de dislocation FRAG (FRAG est une distribution symétrique sur $\{(p_1, p_2, p_3);\ p_i > 0 \text{ et } \sum p_i = 1\}$).

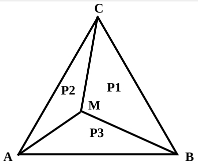


1er niveau : dans quelle face j'insère ?

Je choisis “d'un coup” une triangulation “combinatoire”, uniforme parmi les triangulations en pile à k sommets internes.

2nd niveau : comment j'insère ?

Selon une loi de dislocation FRAG (FRAG est une distribution symétrique sur $\{(p_1, p_2, p_3);\ p_i > 0 \text{ et } \sum p_i = 1\}$).



Notation

On note $\mathbb{U}_k^{\mathrm{FRAG}}$ la distribution sur $\mathcal{D}_k$ donnée par cette construction.

Modèle de Catalan : les résultats

Théorème

Soit m_k une suite de triangulations dessinées aléatoires, de loi $\mathbb{U}_k^{\mathrm{FRAG}}$. Alors il existe un espace métrique compact aléatoire m_∞ telle que

$$m_k \xrightarrow{(d)} m_\infty, \quad \text{quand } k \to \infty.$$

Théorème

Soit m_k une suite de triangulations dessinées aléatoires, de loi $\mathbb{U}_k^{\mathrm{FRAG}}$. Alors il existe un espace métrique compact aléatoire m_∞ telle que

$$m_k \xrightarrow{(d)} m_\infty, \quad \text{quand } k \to \infty.$$

Théorème

Soit m_k une suite de triangulations dessinées aléatoires, de loi $\mathbb{U}_k^{\mathrm{FRAG}}$. Soit $\mu_k := \mu(m_k)$ leur mesure d'occupation. Alors il existe une variable aléatoire U_∞ telle que

$$\mu_k \xrightarrow{(d)} \delta_{U_\infty}, \quad \text{quand } k \to \infty.$$

Illustration : mesure d'occupation

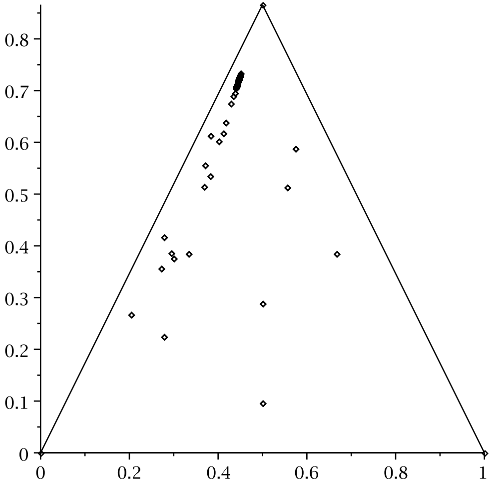
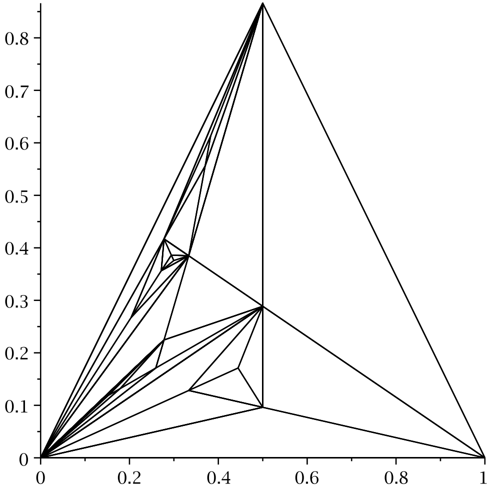


Illustration : triangulation dessinée



Eléments de preuve

Une bijection combinatoire : le 1er niveau d'aléa codé par des arbres ternaires.

Carte	Arbre associé	Hauteur
A chaque étape, on choisit une face uniformément.	Arbre ternaire "de recherche".	$\log(n)$.
On choisit "d'un coup" la triangulation.	Arbre ternaire uniforme à k sommets internes.	$\sqrt{n}$.

Différences entre les deux modèles

1. Ancêtre commun de deux noeuds uniformes :

- Dans un arbre croissant, sa hauteur suit (asymptotiquement) une loi géométrique.
- Dans un arbre de Catalan, sa hauteur est de l'ordre de $\sqrt{n}$.

Différences entre les deux modèles

1. Ancêtre commun de deux noeuds uniformes :

- Dans un arbre croissant, sa hauteur suit (asymptotiquement) une loi géométrique.
- Dans un arbre de Catalan, sa hauteur est de l'ordre de $\sqrt{n}$.

2. Les faces principales :

- Dans le modèle croissant, elles sont similaires (contiennent un nombre linéaire de points, suivent la loi du modèle croissant, etc.).
- Dans le modèle de Catalan, deux des trois sont presque vides.

Merci de votre attention !