

Transfert, col, inversion de Lagrange : ouvrir les boîtes noires

— Notes de cours —

Petit avant-propos

Il ne s'agit pas véritablement d'un cours d'analyse complexe, ni d'analyse combinatoire. La commande des organisatrices d'ALEA est à peu près concentrée dans le titre. Bien que la communauté autour de ce groupe augmente et mûrisse, les plus jeunes y auront toujours le même âge.

Les fonctions holomorphes font l'objet d'un enseignement standard dans le cursus universitaire des licences de mathématiques. Par ailleurs, l'analyse complexe est la racine d'un gros arbre dans le paysage des mathématiques contemporaines. Enfin, l'ombre du livre incontournable – “Le Livre” – *Analytic combinatorics* de Philippe Flajolet et Robert Sedgewick plane, évidemment. Entre ces trois affaires, il fallait tenter de trouver une voie pour un discours élémentaire sur le sujet et résister à la tentation de tout dire tout en en disant assez.

Le parti pris est le suivant : dresser un tour d'horizon sur les fondements des fonctions holomorphes, ou plus exactement sur celles de leurs propriétés qui interviennent le plus souvent dans les trois outils de l'analyse combinatoire cités dans le titre. On ne trouvera dans ces notes rien d'exhaustif sur les fonctions holomorphes, ni du côté des énoncés, ni du côté des preuves. La littérature est riche en ouvrages qui font le tour de la théorie, on s'y référera pour une vision plus complète et détaillée. De même, aucun des exemples donnés n'est original. Ils sont là pour illustrer, parfois naïvement.

Table des matières

1	Singularités des fonctions holomorphes	3
1.1	Fonctions holomorphes	3
1.2	Relever l'exponentielle <i>etc</i>	5
1.3	Logarithme, échelle log-puissance	6
1.4	Prolongement analytique, singularités	9
2	Théorèmes de transfert	12
2.1	Asymptotique des coefficients de l'échelle log-puissance	13
2.2	L'hypothèse camembert	15
2.3	Transfert, une seule singularité dominante	16
2.4	Plusieurs singularités dominantes	18
2.5	Autres conditions suffisantes de transfert	19
3	Davantage sur les Cauchyseries	19
3.1	Indice	19
3.2	Formule des résidus	20
3.3	Nombre de zéros (et de pôles)	21
4	Sur la méthode d'inversion de Lagrange	21

5	Méthode de Laplace, méthode du col	23
5.1	Méthode de Laplace, cas réel	23
5.2	Méthode de Laplace, intégrales curvilignes	25
5.3	Cols en combinatoire analytique	30
6	Exercices	31
7	Une toute petite petite biblio	32

1 Singularités des fonctions holomorphes

1.1 Fonctions holomorphes

Les quatre propriétés équivalentes énoncées ci-dessous caractérisent les fonctions appelées *holomorphes* (dites aussi *analytiques complexes*). Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction.

Premier point de vue : la dérivation complexe

On dit que f est holomorphe sur U lorsque, pour tout $z \in U$,

$$\lim_{h \rightarrow 0, h \neq 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

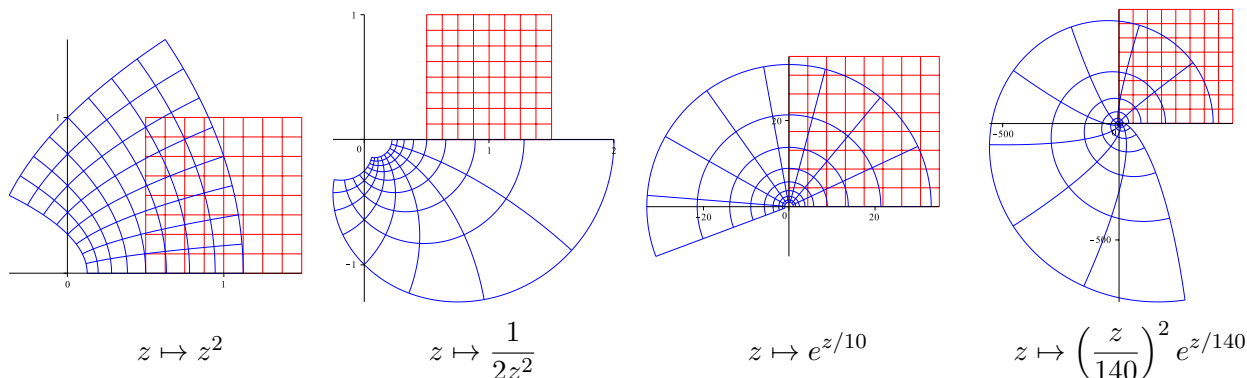
existe. On note alors cette limite $f'(z)$. Les règles de dérivation sont celles que chacun connaît (somme, produit, composition).

Commentaires sur la limite dans le plan complexe. Une autre manière de dire la même chose : f est tangente en tout point à une similitude directe : lorsque h est au voisinage de 0,

$$f(z+h) = a + bh + o(h)$$

où a et b sont complexes. Encore une autre formulation équivalente : au voisinage de tout point, f conserve les angles (orientés) infinitésimaux. Par exemple, une fonction non constante à valeur dans $\mathbb{R}$ (ou dans une droite, ou dans une courbe rectifiable) n'a aucune chance d'être holomorphe ; c'est le cas des fonctions $\Re$, ou $\Im$ ou encore $|\cdot|$.

Exemples : les fonctions développables en série entière, à commencer par les fractions rationnelles et l'exponentielle. Les dessins ci-dessous représentent l'image d'un carré grillagé par les fonctions indiquées. On y voit la préservation de l'angle infinitésimal.



Deuxième point de vue : les équations de Cauchy-Riemann

On note x et y les parties réelle et imaginaire de la variable courante $z = x + iy$. On note aussi P et Q les fonctions réelles définies par $f(x + iy) = P(x, y) + iQ(x, y)$. On dit que f est holomorphe sur U lorsque $(x, y) \mapsto f(x + iy)$ est différentiable en tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x + iy \in U$ et lorsque les dérivées partielles de P et Q vérifient en tout point les équations de Cauchy-Riemann :

$$\forall z \in U, \quad \frac{\partial Q}{\partial y}(z) = \frac{\partial P}{\partial x}(z) \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial y}(z) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(z).$$

Le lien entre la différentiabilité en deux variables réelles et la dérivabilité en la variable complexe se fait *via* les formules $\frac{\partial f(x+iy)}{\partial x} = f'(x+iy) = -i \frac{\partial f(x+iy)}{\partial y}$. On reconnaît dans la jacobienne $\begin{pmatrix} \partial P/\partial x & \partial P/\partial y \\ \partial Q/\partial x & \partial Q/\partial y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial P/\partial x & -\partial Q/\partial x \\ \partial Q/\partial x & \partial P/\partial x \end{pmatrix}$ la matrice d'une similitude directe.

Troisième point de vue : la formule de Cauchy

On dit que f est holomorphe sur U lorsque pour tout $z \in U$ et pour tout disque fermé D centré en z et contenu dans U ,

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

où ∂D désigne le bord de D parcouru une fois dans le sens direct.

Si $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ est un arc de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, l'intégrale curviligne de f le long de γ est définie par $\int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$. Elle ne change pas si on remplace γ par $\gamma \circ \varphi$ où φ est croissante, bijective et de classe $\mathcal{C}^1$ (changement de paramètre).

La formule de Cauchy est une star absolue. On fait tout avec. On peut remplacer le bord du disque par n'importe quel arc simple et direct, à condition qu'on puisse le déformer continûment sur $\{z\}$ tout en restant dans U (ce sont les "trous" dans U qui peuvent faire obstacle). On peut aussi le remplacer par le bord d'un disque à l'intérieur duquel f est holomorphe, et auquel f se prolonge par continuité. En particulier, la formule de Cauchy montre que lorsqu'on connaît une fonction holomorphe le long d'un lacet, on la connaît dans la zone qu'il délimite.

Le passage de la dérivation complexe à la formule de Cauchy est une belle histoire. ① On peut commencer par montrer que si une fonction continue est la dérivée d'une fonction dérivable (au sens complexe), son intégrale est nulle le long de n'importe quel lacet (c'est le théorème fondamental de l'analyse). ② Ensuite, on peut montrer que l'intégrale le long de n'importe quel triangle d'une fonction dérivable φ est nulle : on découpe le triangle en ses quatre sous-triangles des milieux des côtés. Les intégrales curvilignes sur les triangles s'ajoutent, si on les oriente bien. Du coup, l'intégrale le long du grand triangle (enfin, son module) est inférieure à 4 fois la plus grande des intégrales le long des sous-triangles. On découpe à son tour un des sous-triangles où l'intégrale curviligne est maximale, et encore, et encore. Cette suite de triangles emboîtés converge vers un point $\{\ell\}$ où φ a un développement limité d'ordre 1. Comme les fonctions affines ont des primitives holomorphes, l'intégrale de φ sur le $n^{\text{ième}}$ tout petit triangle est celle du reste du développement limité en ℓ , que l'on majore par le $n^{\text{ième}}$ terme d'une suite géométrique convergente. Voilà pourquoi l'intégrale de φ le long du grand triangle est nulle. On peut même supposer seulement que φ est continue sur l'ouvert et dérivable sauf peut-être en un point p en séparant l'intégrale triangulaire en trois intégrales le long de triangles dont l'un des sommets est p . ③ Après cela, on peut établir que si une fonction φ est dérivable sur un disque ouvert sauf peut-être en un point, elle admet une primitive sur le disque. Si c est un point du disque, $\Phi(z) = \int_{[c,z]} f(\zeta) d\zeta$ définit une telle primitive, puisque la nullité de l'intégrale sur les triangles montre que $\Phi(z+h) - \Phi(z)$ est l'intégrale de φ sur le segment $[z, z+h]$. ④ Du coup, si φ est continue sur un disque ouvert et si elle y est dérivable sauf peut-être en un point, son intégrale le long de n'importe quel lacet inclus dans le disque est nulle. ⑤ Pour établir la formule de Cauchy telle qu'elle est énoncée, on prend un z et on applique ce qui précède à la fonction φ définie par $\varphi(z) = f'(z)$ et $\varphi(\zeta) = \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}$ si $\zeta \neq z$: écrire que l'intégrale de φ le long d'un cercle simple et direct centré en z est nulle amène à la formule

$$f(z) \oint_{\partial D} \frac{d\zeta}{z - \zeta} = \oint_{\partial D} \frac{f(\zeta) d\zeta}{z - \zeta}$$

qui permet de conclure modulo le modeste mais célèbre calcul $\oint_{\partial D} \frac{d\zeta}{z - \zeta} = \int_0^{2\pi} r^{-1} e^{-i\theta} i r e^{i\theta} d\theta = 2i\pi$.

Quatrième point de vue : le développement en série entière (DSE)

On dit que f est holomorphe sur U lorsque pour tout $z \in U$, la fonction f est développable en série entière en z , ce qui signifie que f égale sa série de Taylor en z sur un voisinage de z : pour tout $z \in U$, il existe un disque D centré en z tel que

$$\forall \zeta \in D, f(\zeta) = \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(z)}{n!} (\zeta - z)^n.$$

Passer de la formule de Cauchy au développement en série entière est une juste une interversion d'un signe somme et d'une intégrale. En particulier, venu tout droit de la formule de Cauchy, le coefficient d'ordre n du développement en série de f en z s'écrit

$$\frac{f^{(n)}(z)}{n!} = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta$$

si D contient z et est inclus dans U (notations du troisième point de vue). A noter en passant : il suffit qu'une fonction soit dérivable une fois au sens complexe pour qu'elle le soit à tout ordre ; en ce sens (et sous bien d'autres aspects aussi), la dérivation au sens complexe diffère radicalement de la dérivation au sens réel.

1.2 Relever l'exponentielle *etc*

Si $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe et si $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$ est un lacet (c'est-à-dire un arc pour lequel $\gamma(0) = \gamma(1)$), chacune des deux conditions (i) ou (ii) ci-dessous suffisent à ce que $\oint_{\gamma} f = 0$:

- (i) f admet une primitive holomorphe, c'est-à-dire qu'il existe g , holomorphe sur U , telle que $g' = f$;
- (ii) γ se déforme continûment dans U sur un point $a \in U$.

La condition (ii) signifie qu'il existe une application continue $F : [0, 1]^2 \rightarrow U$ telle que $F(\cdot, 0) = \gamma$, $F(\cdot, 1) \equiv a$ et tous les $F(\cdot, t)$ sont des lacets ; on dit dans le jargon que le lacet est **homotope à zéro**.

Le (i) implique par exemple que $\int_{\gamma} z^n dz = 0$ pour tout entier relatif $n \neq -1$ et pour tout lacet γ du plan (qui fait autant de fois qu'on veut le tour de l'origine dans n'importe quel sens). On a vu en revanche que si γ est un cercle centré en 0 parcouru une fois dans le sens direct, $\int_{\gamma} z^{-1} dz = 2i\pi$.

Le (ii) se paraphrase en disant que si deux arcs γ et γ' sont homotopes dans U , *i.e.* si on peut déformer continûment l'un sur l'autre en restant dans U tout en gardant une origine et une extrémité communes, alors $\int_{\gamma} f = \int_{\gamma'} f$.

On arrive à la formalisation mathématique d'un ouvert "sans trou". On appelle cela la *simple connexité*. En voici trois points de vue équivalents (on pourrait en ajouter encore). Soit U un ouvert connexe du plan – la connexité est là pour éviter les canulars des fonctions non constantes à dérivées nulles et simplifier les énoncés.

(1) Rabougir les chemins

U est simplement connexe lorsque tous ses lacets y sont homotopes à zéro.

(2) Existence de primitives

U est simplement connexe lorsque toute fonction holomorphe sur U admet une primitive holomorphe sur U .

Si $b \in U$ est n'importe quel point (b comme "point base"), si f est une fonction holomorphe dans U , alors la fonction $z \mapsto \int_{\gamma_{b \rightarrow z}} f$ est une primitive holomorphe de f . La notation $\gamma_{b \rightarrow z}$ désigne ici un arc d'origine b et d'extrémité z . Ce qui compte ici, c'est que le fait que U soit simplement connexe rend l'intégrale indépendante du choix de l'arc joignant b à z , puisque l'intégrale de b à z et retour en b le long du lacet composé de deux arcs est nulle.

(3) Relèvements par l'exponentielle

U est simplement connexe lorsque pour toute fonction f holomorphe sur U qui ne s'annule pas, il existe g holomorphe sur U telle que $f = \exp(g)$.

Partant de (2), prendre pour g la primitive de la fonction holomorphe f'/f qui rend égale à 1 la fonction localement constante fe^{-g} (sa dérivée est nulle).

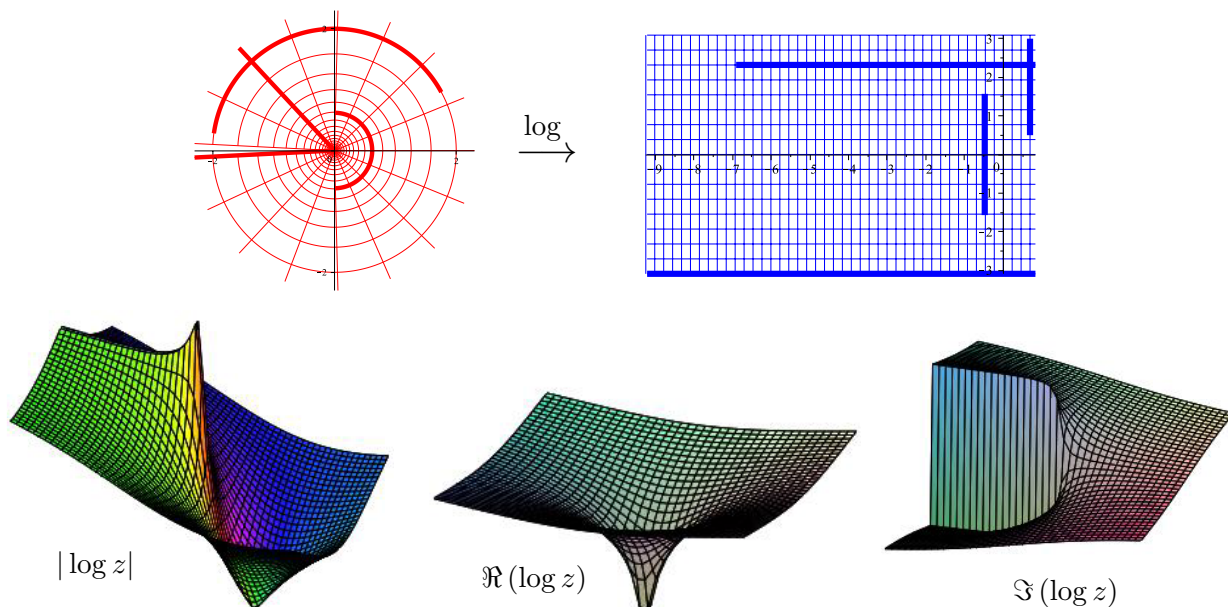
Boucler la boucle et montrer que lorsque les fonctions non nulles se relèvent par l'exponentielle, alors l'ouvert est simplement connexe revient essentiellement à démontrer le magnifique et très célèbre théorème de représentation conforme de Riemann. Ce dernier affirme que tout ouvert connexe et simplement connexe du plan distinct du plan tout entier est *conforme* au disque unité, ce qui signifie qu'il est en bijection bi-holomorphe avec le dit disque. Les preuves classiques du théorème de représentation conforme sont constructives et éblouissantes. Voir par exemple [Rudin].

1.3 Logarithme, échelle log-puissance

On en sait assez pour définir les fonctions $\left(1 - \frac{z}{\zeta}\right)^\alpha \left[\frac{1}{\zeta} \log\left(\frac{1}{1-\frac{z}{\zeta}}\right)\right]^\beta$ qui constituent l'échelle de comparaison dans les théorèmes de transfert.

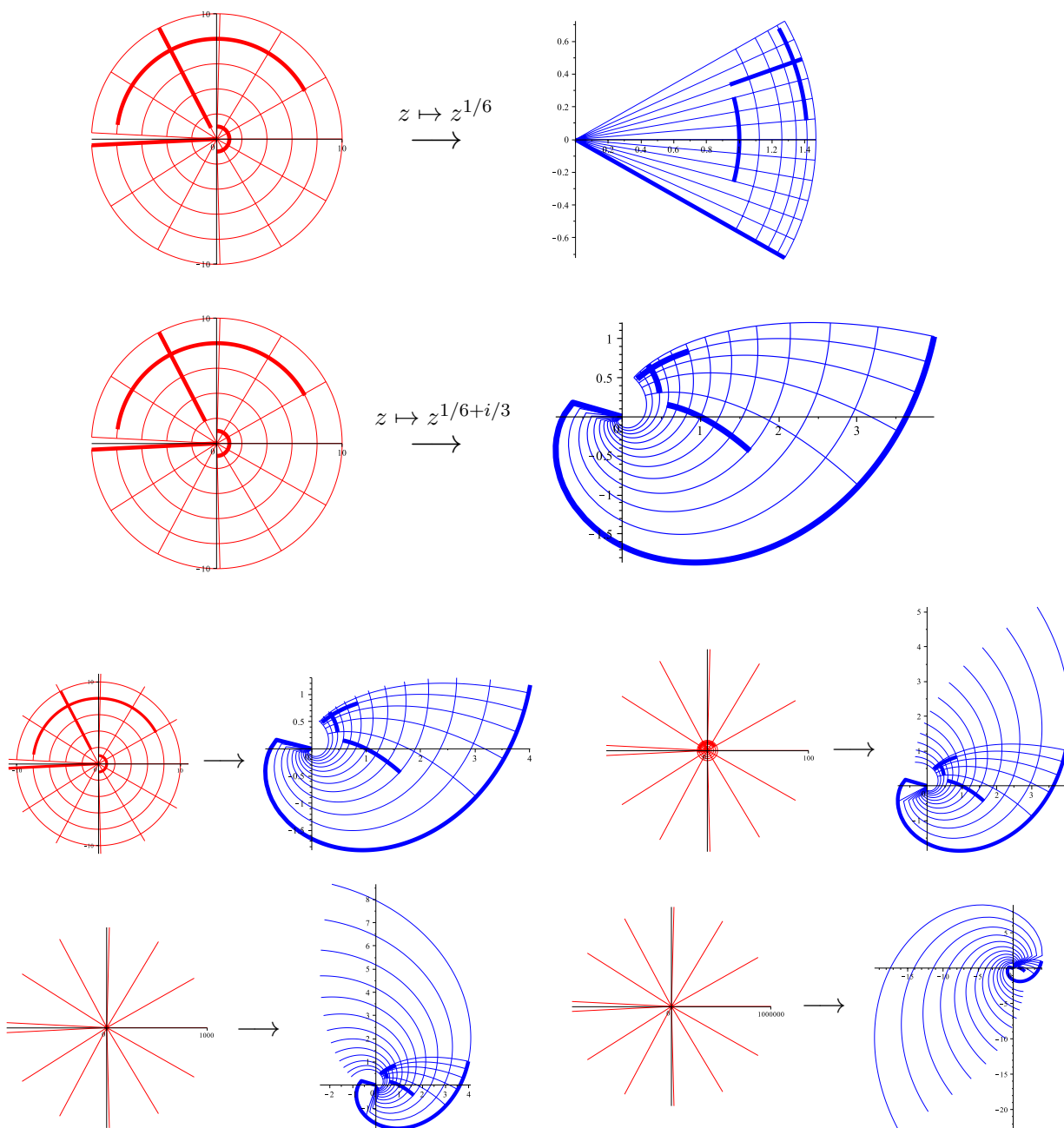
Le premier geste consiste à définir un logarithme. Obstacle standard : trouver une fonction L continue dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ et qui vérifie $\exp(L(z)) = z$ pour tout $z \neq 0$ est désespéré : cela reviendrait à trouver une détermination continue de l'argument sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, chose impossible puisque tourner une fois autour de l'origine fait précisément sauter l'argument de 2π . En revanche, si on ôte au plan une demi-droite δ partant de l'origine, on obtient un ouvert simplement connexe sur lequel la fonction $z \mapsto z$ ne s'annule pas. Cette dernière se relève donc par l'exponentielle : on a défini un logarithme sur $\mathbb{C} \setminus \delta$ (tout un tas, en fait, en ajoutant des multiples de $2i\pi$ à n'importe lequel d'entre eux). Parmi toutes ces déterminations continues du logarithme, on en choisit une et on s'y tient : on note $\boxed{\log}$ l'unique fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$ qui vérifie $\log(1) = 0$ et $\exp(\log z) = z$ pour tout nombre complexe z qui ne soit pas un nombre réel négatif ou nul. Elle prolonge le logarithme népérien réel. On l'affuble du pompeux nom de *détermination principale du logarithme*. Elle se définit aussi par la formule $\log z = \log |z| + i \operatorname{Arg}(z)$ où $\operatorname{Arg}(z) \in]-\pi, \pi[$ désigne l'argument principal de z . L'image du plan coupé $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$ par le logarithme est la bande horizontale $\mathbb{R} + i] - \pi, \pi[$.

Dans les surfaces dessinées ci-dessous, l'axe réel positif est orienté à l'est-sud-est. Il y a une foule de chausse-trapes classiques à éviter. Trois petits exemples sans commentaire : $\log \exp(5i\pi/2) = i\pi/2$, $\log(-1+i) + \log i = \log[(-1+i) \times (i)] + 2i\pi$ ou encore $\log(1+i)^5 = 5 \log(1+i) - 2i\pi$.



Au lieu de couper le plan pour fabriquer une brave fonction, on pourrait ne pas renoncer à toutes les valeurs possibles d'un même logarithme. On obtiendrait une fonction multivaluée dans une surface en forme de vis d'Archimède sur laquelle on définirait – localement puis globalement en recollant les morceaux – une notion de fonction holomorphe. On accéderait ainsi au splendide royaume des surfaces de Riemann. Greffer à cet endroit des considérations plus ou moins avancées sur le sujet est une tentation. On se force, mais on ne s'y soumet pas.

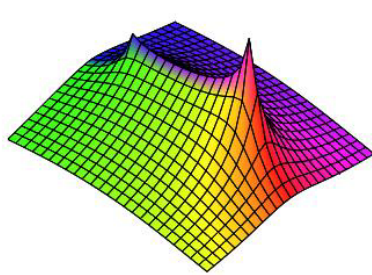
Si α est un nombre complexe et si $z \in \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$, on définit $z^\alpha = \exp(\alpha \log z)$. En particulier, si m est entier naturel non nul, $z^{1/m}$ est la racine $m^{\text{ième}}$ de z contenue dans le secteur $\{z, |\text{Arg}(z)| < \pi/m\}$.



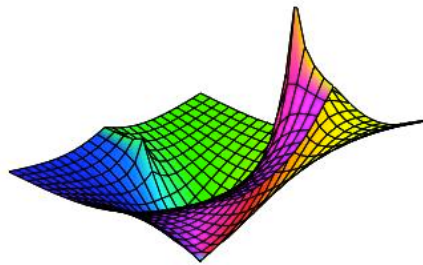
Chaque détermination du logarithme s'annulant en 1 – définie par exemple sur un plan coupé par n'importe quelle demi-droite issue de l'origine – donne lieu à une définition différente des fonctions puissance. Quand on ne dit rien, on sous-entend que c'est de la détermination principale qu'il s'agit. Quoi qu'il en soit, lorsque α est entier, on retrouve toujours les braves fractions rationnelles.

Si β est un nombre complexe, $z^\alpha \log^\beta z = \exp(\alpha \log z + \beta \log \log z)$ n'est définie et holomorphe que sur $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 1]$ à moins que β ne soit entier. Du coup, la fonction $\log^\beta(1-z)$ n'est holomorphe que sur le plan privé de la demi-droite $[0, +\infty[$. En revanche, la fonction $\log^\beta\left(\frac{1}{1-z}\right)$ est holomorphe dans le plan privé des deux demi-droites $] -\infty, 0]$ et $[1, +\infty[$ (si, si, même si $\log \frac{1}{z} = -\log z$ pour tout z). Enfin, pour obtenir la puissance β d'une brave série entière de rayon 1 qui ne s'annule pas en 0, on se rabat sur $\left[\frac{1}{z} \log\left(\frac{1}{1-z}\right)\right]^\beta$ qui, elle, est bien holomorphe sur le plan privé de la demi-droite $[1, +\infty[$.

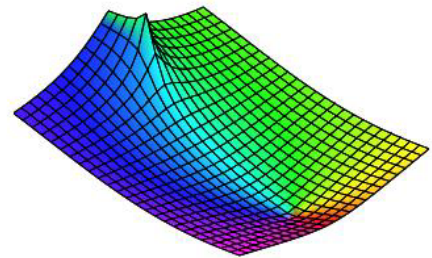
Dans les dessins ci-dessous, l'axe positif est au nord-ouest. Noter le défaut d'holomorphie de $\log \log(1-z)$ le long de $[0, +\infty[$, celui de $\log \log\left(\frac{1}{1-z}\right)$ le long de $] -\infty, 0] \cup [1, +\infty[$ et enfin celui de $\log\left[\frac{1}{z} \log\left(\frac{1}{1-z}\right)\right]$ le long de $[1, +\infty[$.



$|\log \log(1-z)|$



$\left|\log \log\left(\frac{1}{1-z}\right)\right|$



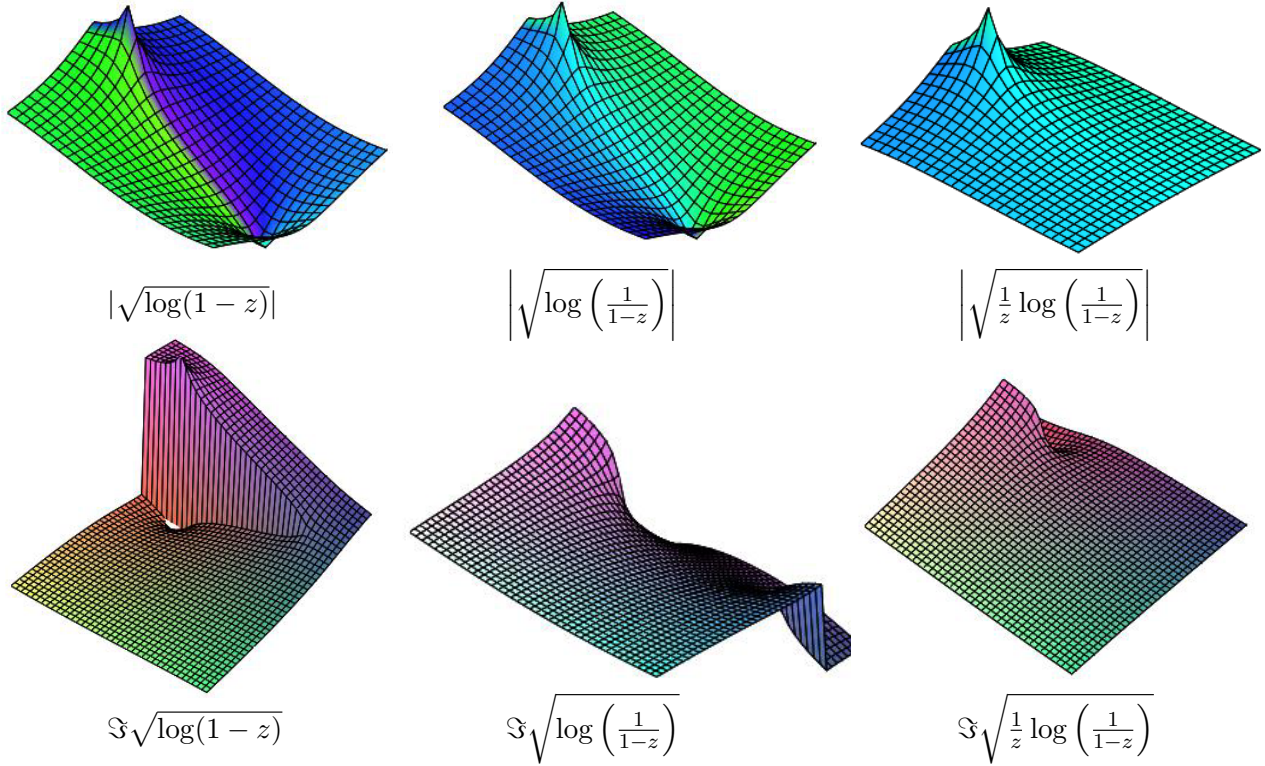
$\left|\log\left[\frac{1}{z} \log\left(\frac{1}{1-z}\right)\right]\right|$

Voilà pourquoi Le Livre et tous les ouvrages raisonnables traitant d'analyse des singularités prennent la précaution de prendre pour échelle de référence la famille de **fonctions log-puissance**

$$\left(1 - \frac{z}{\zeta}\right)^\alpha \left[\frac{1}{\zeta} \log\left(\frac{1}{1 - \frac{z}{\zeta}}\right)\right]^\beta, \quad \alpha, \beta, \zeta \in \mathbb{C}, \zeta \neq 0$$

et non pas $(1 - \frac{z}{\zeta})^\alpha \log^\beta\left(1 - \frac{z}{\zeta}\right)$ qu'on pourrait préférer pour plus de simplicité. Cela dit, lorsque β est entier, la précaution est inutile.

Même en analyse combinatoire, on peut tomber sur des puissances rationnelles de $\log$. Par exemple, la fonction génératrice ordinaire de la taille moyenne d'un arbre binaire uniforme compacté est affublée d'un $\beta = -1/2$, voir l'article de Flajolet, Sipala et Steyaert, référence [257] de Le Livre. Les dessins des surfaces des modules et des parties imaginaires de $\sqrt{\log(1-z)}$, de $\sqrt{\log \frac{1}{1-z}}$ et de $\sqrt{\frac{1}{z} \log \frac{1}{1-z}}$ présentés ci-dessous ont leur axe réel positif au nord-ouest. On y voit les gains successifs de passer à $\frac{1}{1-z}$ d'une part, de diviser par z d'autre part.



1.4 Prolongement analytique, singularités

La littérature sur les fonctions holomorphes appelle presque pareil deux phénomènes assez différents : les points singuliers et les singularités. On commence par les points singuliers ; ils concernent les fonctions qui sont holomorphes tout autour d'un point.

Proposition 1 (Point singuliers d'une fonction holomorphe) *Soit f une fonction holomorphe sur un disque épointé $D(a, r) \setminus \{a\}$. Alors, une des trois situations (disjointes) suivantes se produit.*

- (i) *f est bornée au voisinage de a ; f est alors holomorphe sur $D(a, r)$.*
- (ii) *Il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $(z - a)^m f(z)$ soit bornée (donc holomorphe) au voisinage de a . On dit alors que f a un pôle d'ordre m en a et que f est méromorphe en a .*
- (iii) *f n'a aucune limite (finie ou infinie) en a . On parle alors de singularité essentielle.*

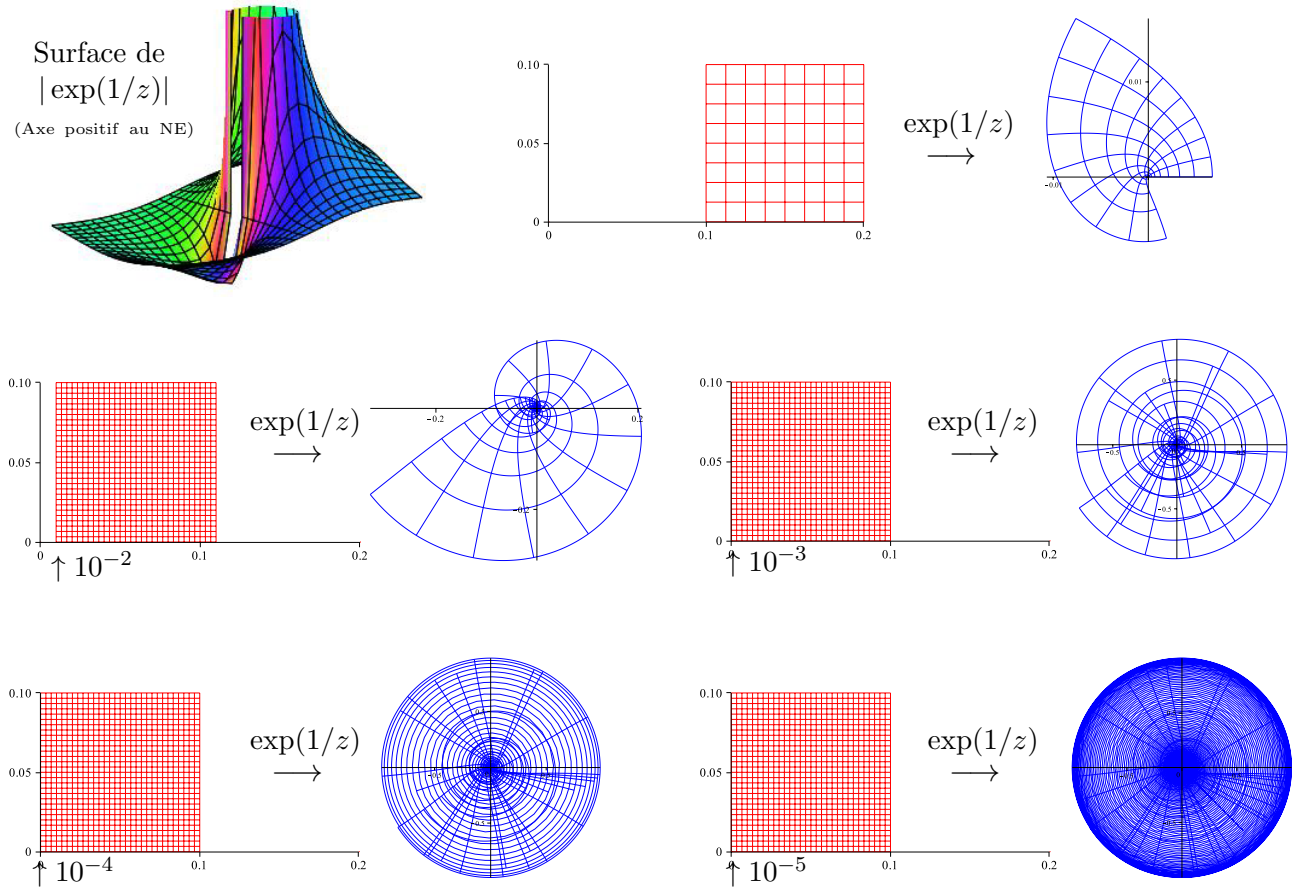
Exemples (un de chaque).

(i) Pour $\frac{z}{e^z - 1}$, l'origine n'est qu'un point singulier apparent. Pour $\frac{1 - \sqrt{1 - 4z}}{2z}$ itou.

(ii) $\tan z$ est méromorphe en tout point du plan et ses pôles sont isolés (on dit *méromorphe dans le plan*) et tous simples. D'ailleurs, sur n'importe quel ouvert du plan, les fonctions méromorphes sont exactement les quotients de fonctions holomorphes. C'est une conséquence du célèbre théorème de factorisation de Weierstrass, qui permet de construire des fonctions holomorphes dont les zéros sont prescrits. Voir par exemple [Rudin].

(iii) L'exemple paradigmatique de singularité essentielle est l'origine pour la fonction $\exp(1/z)$.

Pour isoler (i) et (ii), on peut raisonner à partir du théorème de Laurent : si une fonction f est holomorphe dans une couronne centrée en l'origine $\{z \in \mathbb{C}, 0 < r < |z| < R\}$, elle se développe en *série de Laurent* $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n z^n$ et la formule de Cauchy donne encore $\forall n \in \mathbb{Z}, c_n = \frac{1}{2i\pi} \oint_C \zeta^{-n-1} f(\zeta) d\zeta$ où C est n'importe quel cercle contenu dans la couronne, parcouru une fois dans le sens direct. Noter que les deux séries $\sum_{n \leq 0} c_n z^n$ et $\sum_{n \geq 0} c_n z^n$ convergent normalement sur tout compact de la couronne. Les situations (i) et (ii) correspondent au cas où la suite $(c_n)_{n \leq 0}$ est presque nulle. Pour remplacer l'origine par le point a de l'énoncé, traduire, bien sûr. Au voisinage d'une singularité essentielle a , pour laquelle une infinité de c_n ($n \leq 0$) sont non nuls, le paysage est torturé : l'image par f de n'importe quel voisinage de a est le plan complexe privé éventuellement d'un unique point. Ce résultat difficile est le (grand) théorème de Picard. Voir par exemple [Rudin]. Dans l'exemple ci-dessus, $\exp(1/z)$ "rate" l'origine, et elle seulement. Dans les dessins qui suivent, outre le graphe de $z \mapsto |\exp z|$ coloré par l'argument, on a tracé l'image d'un carré grillagé d'arête 0,1 qui glisse vers l'origine.



L'autre phénomène, qui intéresse davantage la combinatoire analytique, est celui des singularités qui sont les obstructions au prolongement analytique. Le point de vue DSE des fonctions holomorphes entraîne que si une fonction non nulle est holomorphe dans un ouvert connexe, l'ensemble de ses zéros n'a pas de point d'accumulation (la raison de fond : au voisinage d'un zéro nommé a , une fonction holomorphe est de la forme $(z - a)^m g(z)$ où g est holomorphe et ne s'annule pas en a). On en déduit le principe du prolongement analytique.

Théorème 1 (Prolongement analytique) Soient U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et f et g deux fonctions holomorphes sur U . Si f et g coïncident sur une partie de U qui contient un point d'accumulation (dans U), elles sont égales.

Autrement dit, si on peut prolonger une fonction holomorphe à un ouvert connexe plus gros, il n'y a qu'une seule manière de le faire. C'est cela qu'on appelle *le prolongement analytique*. Au regard de cette propriété, on accuse souvent les fonctions holomorphes d'une certaine rigidité.

C'est le principe du prolongement analytique qui donne du corps à la notion de singularité. Un exemple trivial : la série entière $\sum_n z^n$, de rayon 1, définit une fonction holomorphe sur le disque unité. Au voisinage de 1, elle n'est pas bornée. En revanche, au voisinage de n'importe quel autre point du cercle unité, elle se prolonge en une fonction holomorphe ($\frac{1}{1-z}$, bien sûr).

Définition 1 Soient f une fonction holomorphe sur un disque ouvert D et a un point du bord de D . On dit que a est un point régulier de f lorsqu'il existe un disque D' centré en a et une fonction g holomorphe sur D' tels que $f = g$ sur $D \cap D'$. Sinon, on dit que a est une **singularité** de f .

Bref, $a \in \partial D$ est une singularité de f lorsque f ne se prolonge pas analytiquement au voisinage de a . Naturellement, les pôles et les singularités essentielles sont des singularités. Mais il y a des singularités qui ne permettent pas de "faire le tour" du point. C'est le cas par exemple de $\log(1-z)$ en 1 pour la détermination principale du logarithme. Noter aussi que 1 est aussi une singularité de $(1-z)\log(1-z)$ bien que la fonction soit bornée au voisinage de 1 dans le plan privé de $[1, +\infty[$.

Il résulte immédiatement de la définition que l'ensemble des singularités de f est une partie fermée du cercle. En outre, une série entière a toujours une singularité sur son cercle de convergence (sinon, on recouvrirait le cercle d'ouverts où f se prolongerait ; puisque le cercle est compact, f serait holomorphe sur un disque plus gros et la formule de Cauchy permettrait de conclure à la convergence de la série sur ce gros disque).

Exemples.

1- Les fonctions de l'échelle log-puissance : à moins que α ne soit un entier, la fonction $(1-z)^\alpha$ a pour singularités les points de la demi-droite $[1, +\infty[$ et eux seulement. Si α est entier strictement négatif, la fonction est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ et admet un pôle en 1. Si α est entier naturel, c'est un polynôme : pas de singularité. De même, sauf dans quelques cas simples (exercice : lesquels ?), la fonction $(1-z)^\alpha \left[\frac{1}{z} \log \frac{1}{1-z} \right]^\beta$ a pour singularités les points de la demi-droite $[1, +\infty[$ et eux seulement.

2- La fonction $\exp \frac{1}{1-z}$, holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, a une singularité en 1. Elle ne se développe pas dans l'échelle log-puissance puisque quel que soit $\alpha \in \mathbb{C}$, la fonction $(1-z)^\alpha \exp \frac{1}{1-z}$ n'est pas bornée sur l'intervalle réel $[0, 1[$.

3- La fonction $\frac{1}{(2-z)^2(1-z^4)^2}$ admet quatre singularités sur le cercle unité. Ce sont toutes les cinq des pôles doubles.

4- L'ensemble des singularités sur le cercle peut être vache. Par exemple, la série à termes positifs ou nuls $f(z) = \sum_{n \geq 0} z^{2^n}$, dont le rayon est 1, vérifie sur le disque ouvert l'équation fonctionnelle $f(z) = f(z^2) + 1$. Toute racine $(2^n)^{\text{ième}}$ de l'unité ($n \geq 0$) est une singularité de f puisque la série y diverge. Comme ces nombres sont denses dans le cercle, cela montre que le cercle tout entier est formé de points singuliers. On dit dans ce cas que le cercle est une **frontière naturelle** de f .

Cet exemple n'est pas isolé. Un théorème d'Hadamard dit que si une série entière $\sum_n a_n z^{q_n}$ a un rayon de convergence non nul et si en outre il existe $\eta > 0$ tel que $q_{n+1} \geq (1+\eta)q_n$ pour tout n (assez grand), alors le cercle de convergence de la série est une frontière naturelle pour la fonction holomorphe qu'elle définit. Ces séries sont dites *lacunaires*. La précédente en est un exemple.

Ce théorème d'Hadamard permet de construire un exemple (classique) encore plus frappant : la série entière $\sum_n e^{-\sqrt{2^n}} z^{2^n}$, de rayon 1, admet le cercle unité pour frontière naturelle, selon le théorème d'Hadamard. Cependant, la fonction holomorphe qu'elle définit sur le disque ouvert se prolonge en une fonction continue sur le disque fermé, de classe C^∞ sur le cercle (la convergence des séries dérivées est normale sur le disque fermé). Bref, ce n'est pas parce que les dérivées sont toutes bornées lorsqu'on s'approche d'un point en restant dans le disque (même fermé) que le dit point est régulier.

5- Le produit infini

$$f(z) = \sqrt{\frac{1+z}{1-z}} \prod_{n \geq 1} \cosh\left(\frac{z^{2^n}}{2n}\right)$$

définit une fonction holomorphe dans le cercle unité. Exercice spécial ALEA : que compte cette série génératrice ? Le cercle unité est une frontière naturelle. Pour le voir, transformer le produit infini en la série

$$f(z) = \sqrt{\frac{1+z}{1-z}} \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n 2^{2n+1}} \tau_{n-1} \operatorname{Li}_{2n}(z^{4n})$$

où les τ_n sont définis par $\tan z = \sum_{n \geq 0} \tau_n z^{2n+1}$ et où Li_m est le polylogarithme $\operatorname{Li}_m(z) = \sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n^m}$, holomorphe sur le disque ouvert et singulier en 1.

Pour la combinatoire analytique, on peut signaler le célèbre et commode théorème de Pringsheim.

Théorème 2 (Pringsheim) *Si une fonction f est définie par une série entière de rayon R à coefficients positifs ou nuls, alors R est une singularité de f .*

Ce théorème n'est pas très difficile. Il repose pour l'essentiel sur le fait que lorsque les termes sont positifs ou nuls, on peut intervertir sans barguigner les sommations infinies (Tonelli). Voir [Titschmarsch] ou Le Livre.

2 Théorèmes de transfert

L'idée générale, magnifiquement exposée dans Le Livre, est la suivante : l'asymptotique des coefficients d'une série entière est intimement liée aux singularités sur son cercle de la fonction holomorphe qu'elle définit. Le théorème de transfert dit pour l'essentiel, modulo quelques hypothèses, que lorsqu'on sait développer la fonction au voisinage de ses singularités dominantes dans l'échelle log-puissance en z

$$\left(1 - \frac{z}{\zeta}\right)^\alpha \left[\frac{1}{\zeta} \log \left(\frac{1}{1 - \frac{z}{\zeta}} \right) \right]^\beta,$$

son $n^{\text{ième}}$ coefficient de Taylor se développe automatiquement dans l'échelle géo-log-puissance en n

$$\zeta^{-n} n^a \log^b n.$$

Il ne s'agit pas, dans ce cours, de dresser un paysage exhaustif des théorèmes de transfert, mais de montrer comment l'hypothèse intervient par le choix d'un contour *ad hoc*. Les théorèmes de transfert ont largement fait la preuve de leur efficacité en analyse combinatoire. En particulier, ils s'automatisent efficacement, demandez à Bruno Salvy, il sait tout. On peut étendre ces échelles en leur adjoignant des log log, des log log log *etc.* Il faut seulement un peu de courage, ou en avoir vraiment besoin.

2.1 Asymptotique des coefficients de l'échelle log-puissance

Théorème 3 (Asymptotique des coefficients de l'échelle) Si α , β et ζ sont des nombres complexes, $\zeta \neq 0$, le coefficient de Taylor en 0 à l'ordre n de $\left(1 - \frac{z}{\zeta}\right)^\alpha \left[\frac{1}{\zeta} \log \left(\frac{1}{1 - \frac{z}{\zeta}}\right)\right]^\beta$ admet un développement complet dans l'échelle géo-log-puissance en n . En particulier, le début de ce développement s'écrit comme suit :

(i) Si $\beta = 0$ et $\alpha \in \mathbb{N}$, $\left(1 - \frac{z}{\zeta}\right)^\alpha$ est un polynôme.

(ii) Si $\beta = 0$ et $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$,

$$[z^n] \left(1 - \frac{z}{\zeta}\right)^\alpha = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \frac{1}{\zeta^n} \frac{1}{n^{\alpha+1}} \left[1 + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] ;$$

(iii) Si $\beta \neq 0$ et $\alpha \in \mathbb{N}$,

$$[z^n] \left(1 - \frac{z}{\zeta}\right)^\alpha \left[\frac{1}{\zeta} \log \left(\frac{1}{1 - \frac{z}{\zeta}}\right)\right]^\beta = \alpha! \beta \frac{1}{\zeta^n} \frac{\log^{\beta-1} n}{n^{\alpha+1}} \left[1 + \frac{1-\beta}{2 \log n} \ell_\alpha + O\left(\frac{1}{\log^2 n}\right)\right]$$

où $\ell_\alpha = \lim_{x \rightarrow -\alpha} \left(\Psi(x) - \frac{\Psi'(x)}{\Psi(x)}\right)$. Par exemple, $\ell_0 = -2\gamma$, $\ell_1 = 2 - 2\gamma$, $\ell_2 = 3 - 2\gamma$, $\ell_3 = \frac{11}{3} - 2\gamma \dots$

On a noté comme d'habitude Ψ la dérivée logarithmique de Γ et γ la constante d'Euler.

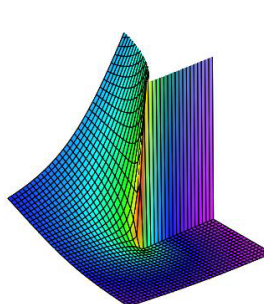
(iv) Si $\beta \neq 0$ et $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$,

$$[z^n] \left(1 - \frac{z}{\zeta}\right)^\alpha \left[\frac{1}{\zeta} \log \left(\frac{1}{1 - \frac{z}{\zeta}}\right)\right]^\beta = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \frac{1}{\zeta^n} \frac{\log^\beta n}{n^{\alpha+1}} \left[1 + \frac{\beta \Psi(-\alpha)}{\log n} + O\left(\frac{1}{\log^2 n}\right)\right].$$

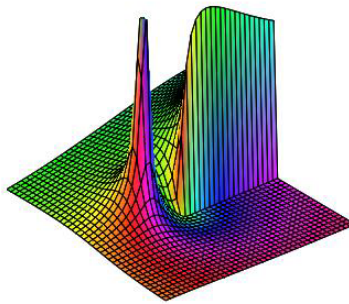
Preuve. Pas question de donner ici une preuve complète, on en trouve dans Le Livre et dans ses sources. On se contente ici d'en montrer le mécanisme dans le cas le plus simple juste après les cas triviaux : celui de $(1 - z)^\alpha$ lorsque $\alpha \notin \mathbb{N}$. Selon la formule de Cauchy, on part de l'expression

$$[z^n](1 - z)^\alpha = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\partial D} \frac{(1 - \zeta)^\alpha}{\zeta^{n+1}} d\zeta$$

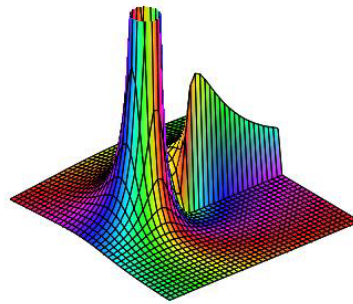
où ∂D est un cercle simple et direct centré en 0 contenu dans le disque unité. Le paysage de cet intégrand le long de ces cercles n'est pas bien favorable à la recherche de cette asymptotique car le pic dû à la division par ζ^{n+1} se transforme en cheminée et répartis sur tout le cercle la contribution du calcul de l'intégrale. Dans les trois premiers dessins ci-dessous, l'axe positif est au nord-est ; dans le quatrième, il est plein est.



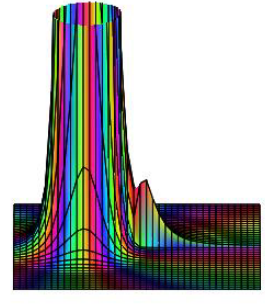
$$|(1 - z)^{1/3+i}|$$



$$\left| \frac{(1 - z)^{1/3+i}}{z} \right|$$

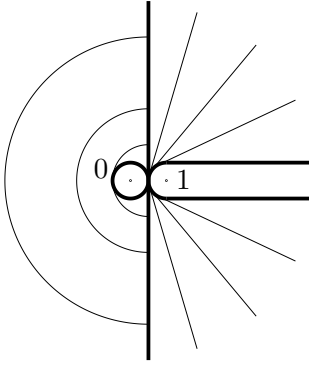


$$\left| \frac{(1 - z)^{1/3+i}}{z^2} \right|$$



$$\left| \frac{(1 - z)^{1/3+i}}{z^6} \right|$$

Pour remédier à cela, on déforme le cercle en d'autres contours qui lui sont homotopes dans le domaine d'holomorphic de $(1-z)^\alpha/z^{n+1}$, c'est-à-dire dans le plan privé de l'origine et de la demi-droite $[1, +\infty[$.

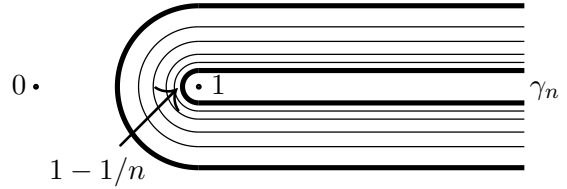


On commence par le cercle de centre 0 qui passe par $1/2$. On le déforme en la réunion d'un segment vertical et d'un arc de cercle (un D à l'envers) et on fait grandir le segment. Dès que n dépasse $\Re(\alpha)$, le module de l'intégrand tend vers zéro lorsque $|\zeta|$ tend vers l'infini et la contribution du demi-cercle (le ventre du D) au calcul de l'intégrale curviligne s'efface lorsque le segment grandit. Au bout du compte, $[z^n](1-z)^\alpha$ égale l'intégrale curviligne du même intégrand, le long du segment vertical $1/2 + i\mathbb{R}$ parcouru une fois de bas en haut. Toujours par homotopie, on déforme cette droite en l'incurvant vers la droite, jusqu'à l'arc constitué de la demi-droite $-i/2 + [1, +\infty[$ parcourue de droite à gauche, suivie du demi-cercle $1 + \frac{1}{2}e^{i[\pi/2, 3\pi/2]}$ parcouru dans le sens indirect puis de la

demi-droite $i/2 + [1, +\infty[$ parcourue de gauche à droite. Il ne reste plus qu'à translater et contracter ce dernier arc en calant le sommet en le point $1 - 1/n$ (et les demi-droites à distance $1/n$ de l'axe réel).

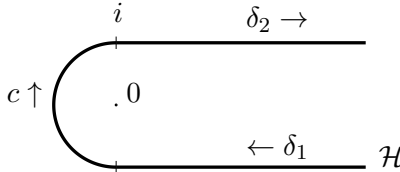
On voit sur le dessin des surfaces que, sur le nouvel arc d'intégration γ_n , la contribution majeure de l'intégrand se fait au voisinage de 1, son module tendant vers zéro lorsqu'on s'éloigne le long des demi-droites.

Avant d'entamer le calcul, on fait un changement de variable $\zeta \rightsquigarrow 1 + \frac{\zeta}{n}$ sous l'intégrale curviligne :



$$[z^n](1-z)^\alpha = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\gamma_n} \frac{(1-\zeta)^\alpha}{\zeta^{n+1}} d\zeta = \frac{n^{-\alpha-1}}{2i\pi} \oint_{\mathcal{H}} \frac{(-\zeta)^\alpha}{\left(1 + \frac{\zeta}{n}\right)^{n+1}} d\zeta$$

où $\mathcal{H}$ est l'arc de Hankel constitué de la demi-droite $\delta_1 = -i + [0, +\infty[$ parcourue de droite à gauche, suivie du demi-cercle indirect $c = e^{i[\pi/2, 3\pi/2]}$ puis de la demi-droite $\delta_2 = i + [0, +\infty[$ parcourue de droite à gauche. Et maintenant, on calcule. Lorsque n tend vers l'infini, $\left(1 + \frac{\zeta}{n}\right)^{n+1} = e^\zeta + O(1/n)$. En prenant soin de contrôler l'uniformité le long de tout le contour d'intégration (on ne le détaille pas ici), on montre que



$$[z^n](1-z)^\alpha = \frac{n^{-\alpha-1}}{2i\pi} \left[\oint_{\mathcal{H}} (-\zeta)^\alpha e^{-\zeta} d\zeta + O\left(\frac{1}{n}\right) \right].$$

On conclut enfin avec le joli lemme suivant qui fait fonctionner l'homotopie des lacets (encore) et le prolongement analytique. ■

Lemme 1 Si $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$ et si $\mathcal{H}$ est le contour de Hankel défini ci-dessus, alors

$$\frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{H}} (-\zeta)^\alpha e^{-\zeta} d\zeta = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)}.$$

Dans le cas où $\alpha \in \mathbb{N}$, l'égalité se prolonge : l'intégrale est nulle et Γ a un pôle simple en $-\alpha$.

Preuve. D'abord, les deux fonctions $\alpha \mapsto \frac{1}{\Gamma(-\alpha)}$ et $\alpha \mapsto \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{H}} (-\zeta)^\alpha e^{-\zeta} d\zeta$ sont holomorphes sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$. En vertu du théorème de prolongement analytique, il suffit donc de montrer l'égalité lorsque $\alpha \in]0, 1[$, ce que l'on suppose sur le champ. Ensuite, par homotopie des lacets dans $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty[$,

l'intégrale est aussi l'intégrale de $(-\zeta)^\alpha e^{-\zeta}$ le long du lacet homothétique $\varepsilon\mathcal{H}$, pour tout $\varepsilon > 0$ (que l'on s'empressera de faire tendre vers 0, on ne l'appellerait pas comme cela sinon) :

$$\frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{H}} (-\zeta)^\alpha e^{-\zeta} d\zeta = \frac{1}{2i\pi} \left[\oint_{\varepsilon\delta_1} (-\zeta)^\alpha e^{-\zeta} d\zeta + \oint_{\varepsilon c} (-\zeta)^\alpha e^{-\zeta} d\zeta + \oint_{\varepsilon\delta_2} (-\zeta)^\alpha e^{-\zeta} d\zeta \right].$$

- On règle le sort du demi-cercle εc , paramétré par $\zeta = -\varepsilon e^{-i\theta}$, $\theta \in [\pi/2, -\pi/2]$. Comme α est réel, sur cet arc,

$$\left| (-\zeta)^\alpha e^{-\zeta} \right| = \left| (\varepsilon e^{-i\theta})^\alpha \right| \cdot \left| e^{\varepsilon e^{i\theta}} \right| = \varepsilon^\alpha e^{\varepsilon \cos \theta} \leq \varepsilon^\alpha e^\varepsilon.$$

Ainsi,

$$\left| \frac{1}{2i\pi} \oint_{\varepsilon c} (-\zeta)^\alpha e^{-\zeta} d\zeta \right| \leq \frac{1}{2} \varepsilon^{1+\alpha} e^\varepsilon$$

qui tend vers 0 lorsque ε tend vers 0 puisqu'on a pris le soin de prendre $\alpha > -1$.

- On s'occupe simultanément de la demi-droite droite-gauche $\varepsilon\delta_1$, paramétrée par $\zeta = -i\varepsilon + t$, $t \in]+\infty, 0]$ et de la demi-droite gauche-droite $\varepsilon\delta_2$, paramétrée par $\zeta = i\varepsilon + t$, $t \in [0, +\infty[$. Leur somme égale

$$\frac{1}{2i\pi} \left[\int_{+\infty}^0 (-t + i\varepsilon)^\alpha e^{-t+i\varepsilon} dt + \int_0^{+\infty} (-t - i\varepsilon)^\alpha e^{-t-i\varepsilon} dt \right].$$

Il s'agit de voir ce qui se passe quand ε tend vers 0. Vu que $t > 0$, la limite de $\log(-t + i\varepsilon)$ lorsque ε tend vers 0 par valeurs positives est $\log t + i\pi$. De même pour son conjugué $\log(-t - i\varepsilon)$ qui tend vers $\log t - i\pi$. Ainsi,

$$\frac{1}{2i\pi} \left[\oint_{\varepsilon\delta_1} (-\zeta)^\alpha e^{-\zeta} d\zeta + \oint_{\varepsilon\delta_2} (-\zeta)^\alpha e^{-\zeta} d\zeta \right] \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0, \varepsilon > 0} \frac{-e^{i\pi\alpha} + e^{-i\pi\alpha}}{2i\pi} \int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t} dt$$

(les convergences sont dominées). On conclut avec la formule de réflexion d'Euler qui entraîne que

$$-\frac{1}{\pi} \sin(\pi\alpha) \Gamma(\alpha + 1) = \frac{1}{\pi} \sin[\pi(\alpha + 1)] \Gamma(\alpha + 1) = 1/\Gamma(-\alpha).$$

- On a fini le travail :

$$\frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{H}} (-\zeta)^\alpha e^{-\zeta} d\zeta = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0, \varepsilon > 0} \frac{1}{2i\pi} \oint_{\varepsilon\mathcal{H}} (-\zeta)^\alpha e^{-\zeta} d\zeta = 1/\Gamma(-\alpha).$$

■

2.2 L'hypothèse camembert

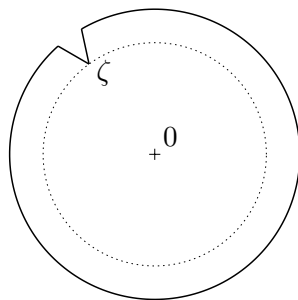
Cette hypothèse est la condition suffisante clef de l'analyse des singularités telle qu'elle est développée dans Le Livre. On évoquera plus loin que d'autres formes d'hypothèses sont envisageables.

L'hypothèse camembert

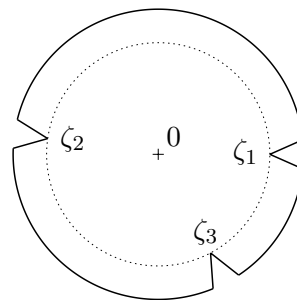
Soient f une fonction holomorphe en 0 et ζ un nombre complexe non nul. On dit que f est *camembert* en ζ lorsque f est holomorphe dans un domaine (un camembert ouvert) du plan de la forme

$$\{z \in \mathbb{C}, |z| < |\zeta| + \eta, z \neq \zeta, |\operatorname{Arg}(z - \zeta)| > \varphi\}$$

où $\eta > 0$ et $\varphi \in]0, \pi/2[$ (Arg désigne l'argument principal). On dit aussi que f est camembert en $\zeta_1, \dots, \zeta_m$ lorsque f est holomorphe sur une intersection de camemberts en les ζ_k .



Camembert en ζ



Camembert en $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$

Exemples.

1- Toute fraction rationnelle définie en 0 est camembert en tous ses pôles à distance minimale de l'origine. Les fonctions de l'échelle $(1 - z)^\alpha \left[\frac{1}{z} \log \frac{1}{1-z} \right]^\beta$ sont toutes camembert en 1 (même celles d'entre elles qui sont des polynômes !).

2- La combinatoire analytique fourmille de camemberts. Je n'insiste pas. Par exemple, euh, au hasard, la fonction génératrice des Catalans $\frac{1-\sqrt{1-4z}}{2}$ est camembert en $1/4$.

3- La fonction $\exp \frac{1}{1-z}$ est camembert en 1.

4- En revanche, en un point d'accumulation de singularités sur le cercle, une fonction ne peut pas être camembert. Par exemple, la série $\sum_{n \geq 0} z^{2^n}$, qui est singulière en toutes les racines $(2^n)^{\text{ièmes}}$ de l'unité, n'est camembert en aucune partie finie du cercle.

2.3 Transfert, une seule singularité dominante

Par définition, lorsqu'une fonction est holomorphe à l'origine, ses *singularités dominantes* sont ses singularités à distance minimale de l'origine. Autrement dit, ce sont les nombres complexes du cercle de convergence de sa série de Taylor en 0 en lesquels la fonction est singulière. On suppose ici qu'une fonction holomorphe en 0 n'a qu'une seule singularité dominante ζ et qu'elle y est camembert.

Théorème 4 (Transfert) Soit f une fonction camembert en ζ . On suppose que σ et ρ sont deux fonctions de l'échelle log-puissance (au point ζ) telles que, lorsque z tend vers ζ en restant inclus dans le camembert ouvert,

$$f(z) = C\sigma(z) + O(\rho(z)).$$

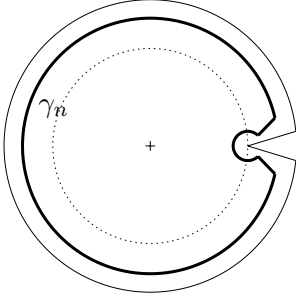
Alors, lorsque n tend vers $+\infty$,

$$[z^n]f(z) = C[z^n]\sigma(z) + O([z^n]\rho(z)).$$

Bien sûr, le O n'a vraiment de sens que lorsque l'ordre en ζ de σ est supérieur à l'ordre en ζ de ρ . Cela permet, lorsqu'on sait développer $f(z)$ au voisinage camembert de ζ dans l'échelle log-puissance en z , de développer $[z^n]f(z)$ dans l'échelle géo-log-puissance en n lorsque n tend vers l'infini. Il suffit pour cela d'appliquer le théorème en retranchant à f le début de son développement. Autrement dit, on peut remplacer le σ de l'énoncé par une combinaison linéaire de fonctions de l'échelle log-puissance (au point ζ).

Preuve. On montre une preuve rapide du cas $\zeta = 1$, $C = 0$ et $\rho(z) = (1 - z)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Autrement dit, au regard de l'asymptotique des coefficients de l'échelle log-puissance, il s'agit de montrer que si f est

$O(1-z)^\alpha$ au voisinage camembert de 1, alors $[z^n]f(z)$ est $O(n^{-\alpha-1})$ en l'infini. Soit ainsi $M > 0$ tel que $|f(z)| \leq M|(1-z)^\alpha|$ au voisinage camembert de 1. On calcule $[z^n]f(z)$ par une intégrale curviligne le long d'un arc simple et direct γ_n entièrement contenu dans le camembert, comme celui dessiné sur



la figure (Hankel) : un petit arc de cercle de centre 1 et de rayon $1/n$, un grand arc de cercle qui fait le tour de l'origine à une distance R strictement supérieure à 1 mais en restant à l'intérieur du camembert et on joint les deux arcs de cercle par des bouts de rayon du petit cercle. Lorsque n tend vers l'infini, la contribution du grand arc de cercle est négligeable devant $n^{-\alpha-1}$ car sa décroissance est mieux que géométrique :

$$\left| \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathbf{C}} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \max_{\mathbf{C}} |f| \left| \oint_{\mathbf{C}} \frac{d\zeta}{\zeta^{n+1}} \right| \leq \frac{cte}{R^{n+1}}.$$

Le petit cercle et les deux segments contribuent significativement à l'asymptotique de l'intégrale. A condition que n soit assez grand pour garantir la majoration de $|f|$ par $M|1-z|^\alpha$, comme $|z| \geq 1 - 1/n$ sur le petit cercle, l'intégrale sur ce dernier se majore par

$$\left| \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathbf{C}} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \max_{\mathbf{C}} |f| \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n+1}} \cdot \frac{2\pi}{n} \leq M \left(\frac{1}{n}\right)^\alpha \cdot \frac{cte}{n} \leq \frac{cte}{n^{\alpha+1}}.$$

Il reste l'intégrale sur les bouts de rayons. On regarde celui du haut. Celui du bas lui ressemble, on s'en abstiendra. En appelant $\theta \in]0, \pi/2[$ l'angle du petit segment avec l'axe des abscisses, on paramètre le dit segment par $1 + te^{i\theta}/n$, $1 \leq t \leq n\rho$ où ce ρ est la distance de 1 au grand arc de cercle. Pourvu que n soit assez grand (toujours pour la majoration en grand O de f),

$$\left| \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathbf{C}} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta \right| = \left| \frac{1}{2i\pi} \int_1^{n\rho} \frac{f\left(1 + \frac{t}{n}e^{i\theta}\right)}{\left(1 + \frac{t}{n}e^{i\theta}\right)^{n+1}} \cdot \frac{e^{i\theta}dt}{n} \right| \leq \frac{M}{2\pi n} \int_1^{+\infty} \frac{\left(\frac{t}{n}\right)^\alpha}{\left|1 + \frac{t}{n}e^{i\theta}\right|^{n+1}} dt.$$

Enfin, puisque $\left|1 + \frac{t}{n}e^{i\theta}\right| \geq 1 + \frac{t}{n}\cos\theta$, et puisque

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^{+\infty} \left(1 + \frac{t}{n}\cos\theta\right)^{-(n+1)} t^\alpha dt = \int_1^{+\infty} t^\alpha e^{-t\cos\theta} dt$$

($\cos\theta \neq 0$, la convergence est dominée), on attrape la majoration qu'on voulait :

$$\left| \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathbf{C}} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta \right| \leq \frac{cte}{n^{\alpha+1}}.$$

Les preuves des autres cas nécessitent parfois davantage d'adresse dans les majorations mais sont du même acabit. ■

Exemples.

1- Les applications du théorème de transfert grouillent en combinatoire analytique. On n'insiste pas.

2- Pour tout $\nu \in \mathbb{C}$, la fonction polylogarithme $\text{Li}_\nu(z) = \sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n^\nu}$ est camembert en 1 et y admet un développement dans l'échelle log-puissance. A vrai dire, ces fonctions se prolongent analytiquement au plan privé de $[1, +\infty[$. Dans le cas où ν est entier négatif ou nul, Li_ν est une fraction rationnelle dont -1 est l'unique pôle. Dans le cas où ν est entier naturel non nul, Li_ν s'obtient par primitivations successives de $\frac{1}{1-z}$. Dans le cas où ν est non entier, le prolongement vient par exemple d'une représentation intégrale à la Lindelöf :

$$\text{Li}_\nu(-z) = \frac{-1}{2i\pi} \oint_{\frac{1}{2} + i\mathbb{R}} \frac{z^s}{s^\nu} \frac{\pi}{\sin \pi s} ds$$

(voir Le Livre qui consacre tout un paragraphe aux polylogarithmes). Ces fonctions admettent des développements complets au voisinage camembert de 1 dans l'échelle log-puissance. Les parties principales des développements ont les formes suivantes :

- (i) si $\nu \in \mathbb{N}^*$, $\text{Li}_\nu(z) = \text{polynôme en } z + \frac{(-1)^\nu}{(\nu-1)!}(1-z)^{\nu-1} \log(1-z) + o((1-z)^{\nu-1} \log(1-z))$;
- (ii) si $\nu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, $\text{Li}_\nu(z) = \text{polynôme en } z + \Gamma(1-\nu)(1-z)^{\nu-1} + o((1-z)^{\nu-1})$.

Bien sûr, appliquer le théorème de transfert à un polylogarithme ne présente pas un intérêt faramineux. Mais ces fonctions s'invitent souvent dans le paysage de l'analyse des singularités et, là, c'est beaucoup plus intéressant.

3- Quoique camembert en 1, la fonction $\exp\left(\frac{1}{1-z}\right)$ ne se développe pas dans l'échelle log-puissance (on l'a vu). Elle échappe à ce théorème de transfert.

4- Par défaut de camembert, les séries entières qui ont une frontière naturelle sur leur cercle de convergence sont aussi exclues du champ d'application de ce théorème de transfert.

2.4 Plusieurs singularités dominantes

Lorsqu'une fonction holomorphe en 0 admet plusieurs singularités dominantes $\zeta_1, \dots, \zeta_m$ (toutes nécessairement sur le cercle de convergence du développement de Taylor en 0 de f), et si cette fonction est camembert en les ζ_k , les contributions des singularités dominantes s'ajoutent entre elles dans le développement de $[z^n] f(z)$. Pour montrer cela, il suffit d'adapter les preuves du cas d'une singularité unique en utilisant un contour comme on se l'imagine : faire le tour de 0 le long d'un cercle au-delà du disque de convergence en évitant tous les accrocs au camembert par des trous de serrure comme dans le dessin de γ_n .

Exemple.

Un exemple archi-classique pour voir des oscillations dans l'asymptotique. La série génératrice du nombre de façons de payer n euros en pièces de 2, 3 et 4 euros est la fraction rationnelle

$$f(z) = \frac{1}{(1-z^2)(1-z^3)(1-z^4)}.$$

Elle est singulière et camembert en 1 (pôle triple), en -1 (pôle double), en $j = e^{2i\pi/3}$, j^2 , i et $-i$ (pôles simples). Les contributions des développements en ces points s'ajoutent. On développe :

- (i) en 1, $f(z) = \frac{1}{24} \frac{1}{(1-z)^3} + \frac{1}{8} \frac{1}{(1-z)^2} + \frac{59}{288} \frac{1}{1-z} + O(1)$;
- (ii) en -1 , $f(z) = \frac{1}{16} \frac{1}{(1+z)^2} + \frac{7}{32} \frac{1}{1+z} + O(1)$;
- (iii) en j , $f(z) = \frac{1}{9} \frac{1}{1-z/j} + O(1)$; pour le développement en j^2 , conjuguer celui-là ;
- (iv) en i , $f(z) = \frac{1-i}{16} \frac{1}{1-z/i} + O(1)$, à conjuguer pour avoir le développement en $-i$.

On calcule la contribution de chacun des termes. On a successivement :

- (i) pour le pôle triple, $[z^n] \frac{1}{(1-z)^3} = \frac{1}{2}(n+2)(n+1) = \frac{n^2}{2} + \frac{3n}{2} + 1$ (formule exacte !) ;
- (ii) pour les pôles au moins doubles, $[z^n] \frac{1}{(1-z)^2} = n+1$ et $[z^n] \frac{1}{(1+z)^2} = (-1)^n(n+1)$;
- (iii) pour tous les pôles, $[z^n] \frac{1}{1-z} = 1$ et $[z^n] \frac{1}{1-z/\omega} = \omega^{-n}$.

On rassemble et on applique le théorème de transfert. On obtient

$$[z^n]f(z) = \left(\frac{n^2}{2} + \frac{3n}{2} + 1\right) \times \frac{1}{24} + (n+1) \left(\frac{1}{8} + (-1)^n \frac{1}{16}\right) + \frac{59}{288} + (-1)^n \frac{7}{32} + (j^{-n} + j^n) \frac{1}{9} + i^{-n} \frac{1-i}{16} + i^n \frac{1+i}{16},$$

soit en simplifiant

$$[z^n]f(z) = \frac{n^2}{48} + \frac{n}{16} \left(3 + (-1)^n\right) + \left(\frac{107}{288} + \frac{9}{32}(-1)^n + \frac{2}{9} \cos \frac{2n\pi}{3} + \frac{\sqrt{2}}{8} \cos(2n+1)\frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Tout ce boulot a été fait pour illustrer l'effet oscillant des singularités non positives sur l'asymptotique, l'ordre où intervient chaque oscillation dépendant de la vigueur de la singularité.

2.5 Autres conditions suffisantes de transfert

Le Livre en dit beaucoup. On effleure à peine d'autres situations ou d'autres méthodes.

- Lorsque $\alpha < -1$, l'hypothèse camembert est inutile. Il suffit que f soit $O(1-z)^\alpha$ au voisinage de 1 dans le disque ouvert pour que $[z^n]f(z)$ soit $O(n^{-\alpha-1})$. Pour le voir, intégrer à la Cauchy sur le cercle de rayon $1 - 1/n$. Idem avec des logarithmes.

- La méthode de Darboux. Elle s'appuie sur le résultat suivant : *soit f une fonction holomorphe dans le disque unité ouvert. Si la dérivée $m^{\text{ième}}$ de f se prolonge par continuité sur le disque fermé, alors $[z^n]f(z) \in o(n^{-m})$.*

└ Pour montrer cela, partir de la formule de Cauchy en intégrant sur le cercle unité, intégrer par parties un nombre suffisant de coups pour pouvoir appliquer le lemme de Riemann-Lebesgue. Cela s'applique par exemple aux fonctions $(1-z)^m \log(1-z)$, ou encore aux polylogarithmes.

- [Tauber. Référence dans le monde des matheux. Exemple.]
- Il arrive que les frontières naturelles présentent une hiérarchie dans la vigueur des singularités. C'est le cas de l'exemple ci-dessus du produit infini réécrit à l'aide de polylogarithmes

$$f(z) = \sqrt{\frac{1+z}{1-z}} \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n 2^{2n+1}} \tau_{n-1} \text{Li}_{2n}(z^{4n}).$$

Si on ne cherche à développer $[z^n]f(z)$ qu'à l'ordre 3, il suffit de ne considérer que les polylogarithmes qui contribuent à cet ordre et de leur appliquer le théorème de transfert. Les autres n'interviendront pas en vertu du théorème de Darboux évoqué ci-dessus. Pour en savoir davantage, voir [Hybride].

- En revanche, une frontière naturelle comme celle de la très célèbre fonction génératrice des partitions

$$\prod_{n \geq 1} \frac{1}{1 - z^n}$$

est hors de portée de ces techniques de transfert, et ressort pleinement de la méthode du col.

3 Davantage sur les Cauchyseries

La formule de Cauchy, on l'a déjà dit, a des variantes et des applications éblouissantes. Bien loin d'en apporter une vision exhaustive, on en pointe deux, certainement les plus célèbres, qu'on utilisera dans la suite : la formule des résidus et le comptage des zéros.

3.1 Indice

Dans la formule de Cauchy telle qu'elle est énoncée plus haut, on intègre le long d'un lacet simple et direct. Cette condition se généralise en un énoncé plus satisfaisant pour l'esprit où la formule s'écrit sans hypothèse sur le lacet. Pour cela, on a besoin de définir l'indice d'un point relatif à un lacet.

Proposition 2 *Soit γ un lacet du plan complexe. Alors, pour tout z hors du support de γ , le nombre*

$$\text{Ind}_\gamma(z) := \frac{1}{2i\pi} \oint_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}$$

est entier relatif. Cette fonction est constante sur les composantes connexes du complémentaire du support de γ , nulle sur celle d'entre elles qui n'est pas bornée.

Ce nombre, on l'aura compris, est appelé *indice de z par rapport à γ* . Vu que l'intégrand est holomorphe, $\text{Ind}_\gamma(z)$ ne change pas si on remplace γ par un lacet qui lui est homotope dans $\mathbb{C} \setminus \{z\}$. Lorsque γ est un cercle centré en z simple et direct, $\text{Ind}_\gamma(z) = 1$ comme on a déjà vu. Si le même cercle est indirect, $\text{Ind}_\gamma(z) = -1$. Plus généralement, $\text{Ind}_\gamma(z)$ compte le nombre de tours – signe compris – que fait γ autour du point z .

Preuve (archi classique). Quitte à changer de paramètre, on prend $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}$, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. La fonction définie sur $[0, 1]$ par

$$\varphi(t) = \exp \left(\int_0^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z} ds \right)$$

est continue. Elle est dérivable sauf peut-être en les points où γ' n'est pas continue (ces points sont en nombre fini) et vérifie

$$\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z}.$$

Cela montre que la fonction continue $t \mapsto \frac{\varphi(t)}{\gamma(t) - z}$ a une dérivée nulle sur le complémentaire d'une partie finie de $[0, 1]$. Donc elle est constante, ce qui entraîne que $\frac{\varphi(0)}{\gamma(0) - z} = \frac{\varphi(1)}{\gamma(1) - z}$. Puisque γ est un lacet, $\gamma(0) = \gamma(1)$, qui implique que $\varphi(0) = \varphi(1) = 1$: les valeurs de $\int_0^1 \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z} ds$ sont multiples de $2i\pi$, ce qu'on voulait démontrer. Enfin, la fonction $z \mapsto \text{Ind}_\gamma(z)$ est continue (elle est même holomorphe) sur le complémentaire du support de γ . Comme ses valeurs sont entières, elle est localement constante. Qu'elle soit nulle sur le complémentaire vient directement de sa définition (faire tendre z vers l'infini ; au passage, qu'il n'y ait qu'une seule composante connexe non bornée au complémentaire du support du lacet vient de ce que lorsqu'on enlève un disque du plan, ce qui reste est connexe). ■

3.2 Formule des résidus

Définition 2 Soit f une fonction holomorphe sur un disque épointé $D \setminus \{a\}$ de $\mathbb{C}$. Le résidu de f en a , qu'on notera $\text{Res}(f, a)$ est le nombre défini par n'importe quelle des propriétés suivantes :

- (i) $\text{Res}(f, a) = c_{-1}$ où $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z - a)^n$ le développement en série de Laurent de f en a ;
- (ii) $\text{Res}(f, a)$ est l'unique nombre complexe c tel que la fonction $f(z) - \frac{c}{z - a}$ admette une primitive holomorphe au voisinage épointé de a ;
- (iii) $\text{Res}(f, a) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\partial D} f(\zeta) d\zeta$ où ∂D est le bord simple et direct de D .

Le calcul de résidus est un sport à part entière. Citons deux cas commodes. Le premier : si a est un pôle simple de f , alors $\text{Res}(f, a) = \lim_{z \rightarrow a} (z - a)f(z)$. Le second : si f et g sont holomorphes en a et si a est un zéro simple de g , alors $\text{Res}(f/g, a) = f(a)/g'(a)$.

On peut maintenant énoncer le fameux théorème des résidus, forme élaborée de la formule de Cauchy. Combiné avec l'homotopie des chemins, c'est un outil efficace de calcul d'intégrales réelles qui fait l'objet de livres entiers. Il a aussi un intérêt théorique. On l'utilisera plus bas.

Théorème 5 (Théorème des résidus) Soient U un ouvert simplement connexe du plan et $\mathcal{S}$ une partie finie de U . Soient f une fonction holomorphe sur $U \setminus \mathcal{S}$ et γ un lacet à valeurs dans $U \setminus \mathcal{S}$. Alors,

$$\frac{1}{2i\pi} \oint_\gamma f(\zeta) d\zeta = \sum_{s \in \mathcal{S}} \text{Res}(f, s) \text{Ind}_\gamma(s).$$

Preuve. On note g la partie singulière de f , somme des développements négatifs des développements en série de Laurent de f en les points de $\mathcal{S}$. Puisque $f - g$ est holomorphe dans le simplement connexe U , $\int_{\gamma} f = \int_{\gamma} g$. Par ailleurs, les $(z - s)^{-m}$, $m \geq 2$ admettent des primitives dans U ; leurs intégrales le long du lacet γ sont donc nulles. Comme les séries de Laurent sont normalement convergentes, il ne reste plus que

$$\oint_{\gamma} f = \sum_{s \in \mathcal{S}} \oint_{\gamma} \frac{\text{Res}(f, s)}{z - \zeta} d\zeta$$

et le tour est joué. ■

Corollaire 1 Soient f une fonction holomorphe dans un ouvert simplement connexe U , du plan, z un point de U et γ un lacet qui ne passe pas par z . Alors,

$$\text{Ind}_{\gamma}(z) \cdot f(z) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Le corollaire se déduit immédiatement du théorème. C'est la formule de Cauchy complète, sans hypothèse de simplicité ni d'orientation du lacet. Dans les deux énoncés, au lieu de supposer que U est simplement connexe on peut intégrer le long de n'importe quel lacet homotope à zéro. La même preuve fonctionne.

3.3 Nombre de zéros (et de pôles)

Proposition 3 Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert U . Alors, pour tout disque fermé D contenu dans U , si ∂D désigne le bord de D parcouru une fois dans le sens positif et si f ne s'annule pas sur le support de ∂D ,

$$\frac{1}{2i\pi} \oint_{\partial D} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta$$

est le nombre de zéros de f dans D , comptés avec leurs multiplicités.

Lorsque a est un zéro de f , la *multiplicité* de a est l'entier naturel m tel que $f(a) = (z - a)^m g(z)$ où g est holomorphe et non nulle en a . La proposition est énoncée dans un cas simple. La formule complète, qui n'est pas plus chère, s'étend aux pôles. On définit la multiplicité d'un pôle comme celle d'un zéro ; c'est alors un entier négatif. A vrai dire, parfum algébrique, on parle plutôt de *valuation* de f en a . On notera $v_f(a)$ la valuation de f en a . On peut alors énoncer le théorème de comptage des zéros et pôles d'une fonction méromorphe.

Théorème 6 Soient U un ouvert simplement connexe du plan et f une fonction méromorphe dans U , n'ayant dans U qu'un nombre fini de zéros et de pôles. Soit γ un lacet de U qui ne passe par aucun zéro et aucun pôle de f . Alors,

$$\frac{1}{2i\pi} \oint_{\gamma} \frac{f'}{f} = \sum_{a \in \mathbb{C}} v_f(a) \cdot \text{Ind}_{\gamma}(a).$$

En particulier, si γ est simple et direct, l'intégrale compte le nombre de zéros moins le nombre de pôles de la région compacte que γ délimite (multiplicités comprises).

Preuve. C'est la formule des résidus : en chaque $a \in \mathbb{C}$, la fonction f'/f a pour résidu $v_f(a)$ (qui est nul si a n'est ni pôle ni zéro de f). ■

4 Sur la méthode d'inversion de Lagrange

La situation est la suivante : une série génératrice f vérifie une équation implicite

$$f(z) = z\phi(f(z))$$

où ϕ est holomorphe et non nulle à l'origine. On cherche à extraire les coefficients de f de cette équation implicite. Le théorème d'inversion locale holomorphe garantit que l'équation fonctionnelle détermine la fonction f , et que cette dernière est automatiquement holomorphe en 0. Le théorème de Lagrange exprime les coefficients de Taylor de f en fonction de ceux de ϕ . Une petite piqure de rappel : transformation conforme signifie application biholomorphe.

Théorème 7 (Inversion locale holomorphe) *Soit f une fonction holomorphe en $a \in \mathbb{C}$, telle que $f'(a) \neq 0$. Alors, il existe un voisinage ouvert U de a et un voisinage ouvert V de $f(a)$ tels que $f : U \rightarrow V$ soit une transformation conforme.*

Deux choses à retenir : f^{-1} est holomorphe et f est ouverte.

Preuve. On suppose que $a = f(a) = 0$, ce qui ne gâche rien. Puisque les zéros de f sont isolés, soit D un disque ouvert sur lequel f ne s'annule qu'en 0. Soit $r > 0$ tel que $|f(z)| \geq r$ sur le bord ∂D de ce disque. Alors, $|f(z) - w| \geq r/2$ pour tous $z \in \partial D$ et $|w| \leq r/2$. En tournant une fois autour de 0 le long de ∂D dans le sens direct lorsque $|w| \leq r/2$, l'intégrale

$$\frac{1}{2i\pi} \oint_{\partial D} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta) - w} d\zeta$$

est le nombre de solutions de l'équation $f(z) = w$ dans D et varie continûment en w . Comme elle vaut 1 pour $w = 0$ (l'origine est le seul zéro de f dans D), elle vaut 1 pour tout w , ce qui signifie que dès que $|w| \leq r/2$, l'équation $f(z) = w$ a une solution unique dans D . Enfin, lorsque $w = f(z)$, le résidu en z de $\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta) - w}$ étant précisément z , la formule des résidus donne, pour le même arc,

$$z = f^{-1}(w) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\partial D} \frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta) - w} d\zeta. \quad (1)$$

En particulier, cette formule montre que f^{-1} est holomorphe. ■

Deux petites remarques.

- (i) On trouvera dans la littérature un théorème des fonctions implicites holomorphes, compagnon habituel de l'inversion locale.
- (ii) Dans le cas où $f'(a) = 0$, f s'écrit localement $f(z) = f(a) + (z - a)^m g(z)$ où g est holomorphe et non nulle en a et où $m \geq 2$. Puisque g est non nulle, elle se relève par l'exponentielle. En particulier, il existe h holomorphe et non nulle en a telle que $g = h^m$ autour de a . Ayant pu écrire $f(z) = f(a) + [(z - a)h(z)]^m$, on voit que f n'a aucune chance d'être injective au voisinage de a (on parle de *ramification*).

Proposition 4 (Inversion de Lagrange) *Soit ϕ une fonction holomorphe au voisinage de 0, non nulle en 0. Soit y l'unique fonction holomorphe en 0 qui soit solution de l'équation fonctionnelle $y(z) = z\phi(y(z))$. Alors, $y(0) = 0$ et pour tout $n \geq 1$,*

$$[z^n]y(z) = \frac{1}{n}[w^{n-1}]\phi^n(w).$$

Preuve. L'existence et l'unicité de y vient de l'inversion locale holomorphe appliquée à la fonction $y \mapsto y/\phi(y)$ dont la dérivée à l'origine est $1/\phi(0)$. La formule peut se voir par changement de variable $w = y(z)$ (qui donne $w = z\phi(w)$) dans l'intégrale curviligne suivante, le long d'un cercle simple et direct autour de l'origine assez petit pour être inclus dans un disque sur lequel y est conforme :

$$n[z^n]y(z) = [z^{n-1}]y'(z) = \frac{1}{2i\pi} \oint \frac{y'(z)}{z^n} dz = \frac{1}{2i\pi} \oint \frac{\phi^n(w)}{w^n} dw = [w^{n-1}]\phi^n(w).$$

Exemple.

Le très excellent exemple de la série $C(z) = \sum C_n z^n$ des nombres de Catalan marche à merveille. La fonction $y = C - 1$ est solution de l'équation fonctionnelle $y(z) = z(1 + y(z))^2$. On en déduit sans sourciller que $C_n = \frac{1}{n} [w^{n-1}] (1 + w)^{2n} = \frac{1}{n} \binom{2n}{n-1} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$.

Remarques.

1- Plusieurs angles de vue sur l'inversion de Lagrange sont possibles. On peut par exemple en donner une version formelle (*i.e.* dans laquelle les objets sont des séries formelles) voir Le Livre par exemple. On peut aussi en faire une preuve combinatoire, voir par exemple le texte *Développements limités et réversion des séries* de Bacher et Lass (en le gougueulisant, on le trouve).

2- Dans le cas où $\phi(0) = 0$, l'équation fonctionnelle n'a que la fonction nulle pour solution holomorphe (exercice).

Lorsqu'on cherche un développement asymptotique des coefficients de Taylor d'une fonction holomorphe en 0 définie par une équation à la Lagrange, on ne peut en général pas utiliser directement les théorèmes de transfert à cause de la puissance $n^{\text{ième}}$ de ϕ . Dans cette situation, on peut efficacement avoir recours à la méthode du col.

5 Méthode de Laplace, méthode du col

Le cadre général est celui de la méthode de Laplace qui traite de l'asymptotique d'intégrales (curvilignes ou non) de la forme

$$\int \varphi(t) e^{x\psi(t)} dt$$

lorsque le réel x tend vers $+\infty$, l'intégrand pouvant prendre des valeurs complexes. On se place d'abord dans un cadre réel dans lequel l'intégrale se concentre en les points où ψ atteint son maximum (strict). Lorsqu'on élargit le cadre à l'intégrale curviligne de fonctions holomorphes le long d'un arc, c'est au voisinage des points cols de ψ que l'intégrale se concentre. Enfin, on se contentera d'évoquer comment la combinaison de ces méthodes et de l'heuristique qu'elles induisent s'appliquent aux situations de l'analyse combinatoire, un paysage détaillé de l'affaire faisant l'objet de chapitres entiers de Le Livre.

5.1 Méthode de Laplace, cas réel

On suppose que φ et ψ sont à valeurs réelles. La méthode repose sur l'idée suivante : si la fonction ψ présente un maximum absolu sur l'intervalle d'intégration, il sera amplifié par les grandes valeurs de x et l'asymptotique sera concentrée au voisinage des valeurs de l'intégrand en ce point, la partie restante de l'intégrale se trouvant négligeable. On se place dans le cas où φ et ψ sont développables en série entière au voisinage du point où ce maximum est atteint. Les hypothèses choisies ne sont pas les plus générales. On peut les élargir, le mécanisme de la méthode restant essentiellement identique.

Théorème 8 (Méthode de Laplace) Soient ϕ et ψ deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs réelles. On suppose :

- (i) que $\varphi(t)e^{x\psi(t)}$ est intégrable pour au moins une valeur de $x > 0$;
- (ii) que ψ atteint son maximum absolu en un unique point t_0 intérieur à I ;
- (iii) que φ et ψ sont développables en séries entières au voisinage de t_0 ;
- (iv) que $\psi''(t_0) < 0$.

Alors, lorsque x tend vers $+\infty$, l'intégrale $\int_I \varphi(t) e^{x\psi(t)} dt$ admet un développement complet dans

l'échelle $e^{x\psi(t_0)}x^{-(n+1/2)}$, $n \in \mathbb{N}$. Le terme principal de ce développement est

$$\int_I \varphi(t)e^{x\psi(t)}dt = \varphi(t_0) \sqrt{\frac{-2\pi}{\psi''(t_0)}} \frac{e^{x\psi(t_0)}}{\sqrt{x}} \left[1 + O\left(\frac{1}{x}\right) \right].$$

Autrement dit, sous ces hypothèses, on obtient la valeur de l'intégrale au premier ordre en écrivant

$$\int_I \varphi(t)e^{x\psi(t)}dt \approx \int_{\mathbb{R}} \varphi(t_0) e^{x\left[\psi(t_0) + \frac{(t-t_0)^2}{2}\psi''(t_0)\right]}dt = \varphi(t_0) e^{x\psi(t_0)} \int_{\mathbb{R}} e^{x\frac{(t-t_0)^2}{2}\psi''(t_0)}dt.$$

Dans le cas où ψ'' s'annule en t_0 , le résultat tombe en défaut tel qu'il est énoncé. Cependant, le raisonnement subsiste et amène encore à un développement complet.

Preuve. (i) D'abord, l'asymptotique ne dépend que de φ et ψ au voisinage de t_0 : lorsque $\delta > 0$, $e^{-x\psi(t_0)} \int_{|t-t_0| \geq \delta} \varphi e^{x\psi}$ décroît exponentiellement avec x . En effet, une fois δ choisi, soit $h > 0$ tel que $\psi(t_0) - \psi(t) \geq h$ lorsque $|t - t_0| \geq \delta$. Soit aussi x_0 tel que $\varphi e^{x_0\psi}$ soit intégrable. Alors, si $x > 0$,

$$e^{-x\psi(t_0)} \left| \int_{|t-t_0| \geq \delta} \varphi e^{x\psi} \right| \leq e^{-hx} \left[e^{x_0(h-\psi(t_0))} \int_I |\varphi| e^{x_0\psi} \right] = cte \times e^{-hx}.$$

(ii) Il reste à étudier l'intégrale $e^{-x\psi(t_0)} \int_{|t-t_0| \leq \delta} \varphi e^{x\psi}$. Quitte à prendre δ assez petit, puisque ψ est développable en série entière en t_0 (on abrégera par $DSE(t_0)$), on peut écrire $\psi(t_0) - \psi(t) = u(t)^2$ où u est $DSE(t_0)$, son développement commençant par $u(t) = \sqrt{\frac{-\psi''(t_0)}{2}}(t - t_0)[1 + \dots]$. On a utilisé une forme réelle du relèvement par la racine carrée des fonctions holomorphes qui ne s'annulent pas. Comme $u(t_0) = 0$ et $u'(t_0) \neq 0$, on peut inverser localement u en une fonction $v = u^{-1}$ qui est $DSE(0)$ – on a utilisé une forme réelle de l'inversion locale holomorphe. En changeant de variable $t = v(s)$ sous l'intégrale, on obtient

$$e^{-x\psi(t_0)} \int_{|t-t_0| \leq \delta} \varphi(t)e^{x\psi(t)}dt = \int_{|t-t_0| \leq \delta} \varphi(t)e^{-xu(t)^2}dt = \int_{u(t_0-\delta)}^{u(t_0+\delta)} \varphi[v(s)]v'(s)e^{-xs^2}ds$$

où 0 est à l'intérieur du dernier intervalle d'intégration et où $\varphi[v(0)]v'(0) = \varphi(t_0) \sqrt{\frac{2}{-\psi''(t_0)}}$.

(iii) En choisissant δ pour que tout le (ii) soit valide, puis en lui appliquant le (i), on conclut avec le lemme suivant, qui est un cas particulier simple du théorème. ■

Lemme 2 Soit φ une fonction continue sur un intervalle compact I contenant 0 dans son intérieur. On suppose que $\varphi(t) = \sum_{n \geq 0} a_n t^n$ est développable en série entière à l'origine. Alors, lorsque x tend vers $+\infty$, on a l'équivalent

$$\int_I \varphi(t)e^{-xt^2}dt \sim \varphi(0) \sqrt{\frac{\pi}{x}}$$

et même le développement asymptotique complet suivant :

$$\int_I \varphi(t)e^{-xt^2}dt \asymp \sum_{n \geq 0} a_{2n} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) x^{-n+\frac{1}{2}}.$$

Noter que le sens d'un développement asymptotique complet, noté ici $\asymp$, est l'écriture de développements asymptotiques à tous ordres, ici dans l'échelle des puissances de x ; il ne s'agit pas d'une série convergente. C'est Poincaré qui, le premier, développa ce concept.

Preuve. Comme dans le (i) de la preuve du théorème, la partie significative de l'intégrand se trouve au voisinage de l'origine. Sur un intervalle où φ égale sa série de Taylor, on intervertit, on change de variable :

$$\int_0^\delta \sum_{n \geq 0} a_n t^n e^{-xt^2} dt = \sum_{n \geq 0} a_n \int_0^\delta t^n e^{-xt^2} dt = \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{2} x^{-\frac{n+1}{2}} \int_0^{x\delta^2} t^{\frac{n-1}{2}} e^{-t} dt \asymp \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{2} x^{-\frac{n+1}{2}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right),$$

la dernière assertion relative au développement asymptotique venant du fait que, pour chaque n , le reste $\int_{x\delta^2}^{+\infty} t^{\frac{n-1}{2}} e^{-t} dt$ de l'intégrale qui converge vers $\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$ décroît exponentiellement en x . De la même manière, $\int_{-\delta}^0 \varphi(t) e^{-xt^2} dt \asymp \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{a_n}{2} x^{-\frac{n+1}{2}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$. On termine en sommant ces deux développements. ■

Exemple.

On obtient ainsi la formule de Stirling (une preuve de plus !). On écrit, lorsque $x > 0$, en changeant de variable,

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt = x^{x+1} \int_0^{+\infty} e^{-x(t-\log t)} dt.$$

La fonction $\log t - t$ atteint son maximum en 1 et sa dérivée seconde y vaut -1 . On trouve ainsi ce qu'on attendait : $\Gamma(x+1) = \left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{2\pi x} [1 + O\left(\frac{1}{x}\right)]$.

5.2 Méthode de Laplace, intégrales curvilignes

Le principe général de la méthode de Laplace pour les intégrales curvilignes s'appuie sur l'homotopie des arcs et sur la méthode réelle. Lorsqu'on cherche à calculer l'asymptotique lorsque x tend vers $+\infty$ d'une intégrale de la forme

$$\oint_\gamma \varphi(\zeta) e^{x\psi(\zeta)} d\zeta = \int_a^b \varphi(\gamma(t)) \gamma'(t) e^{x\psi(\gamma(t))} dt$$

où γ est un arc (lacet ou non) et où φ et ψ sont des fonctions holomorphes, on peut, sans modifier la valeur de l'intégrale, déformer l'arc en un autre arc qui lui soit homotope dans le domaine d'holomorphicité des fonctions. Le module de l'intégrand portant le paramètre est $|e^{x\psi}| = e^{x\Re\psi}$. Suivant l'idée de la méthode réelle, la méthode de Laplace consiste à choisir un arc le long duquel la fonction $\Re\psi$ présente un (voire plusieurs) maximum strict le plus prononcé possible.

Un exemple.

Il s'agit de la fonction d'ordre 1 de Bessel. C'est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$J_1(x) = \frac{1}{2i\pi} \oint_\gamma e^{\frac{x}{2}(\zeta - \zeta^{-1})} \frac{d\zeta}{\zeta^2}$$

où γ est n'importe quel lacet simple et direct faisant une fois le tour de l'origine (c'est-à-dire tel que $\text{Ind}_\gamma(0) = 1$).

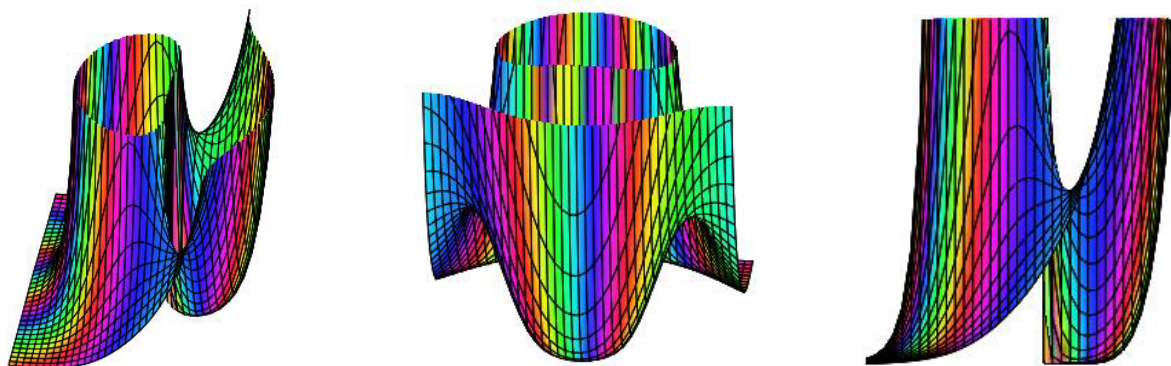
Cette fonction est aussi l'unique solution définie en 0 de l'équation différentielle $x^2 y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0$. Elle s'écrit aussi sous la forme de la série entière de rayon $+\infty$

$$J_1(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k!(k+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1}.$$

Tout ce qui suit s'applique sans broncher aux fonctions de Bessel de première espèce.

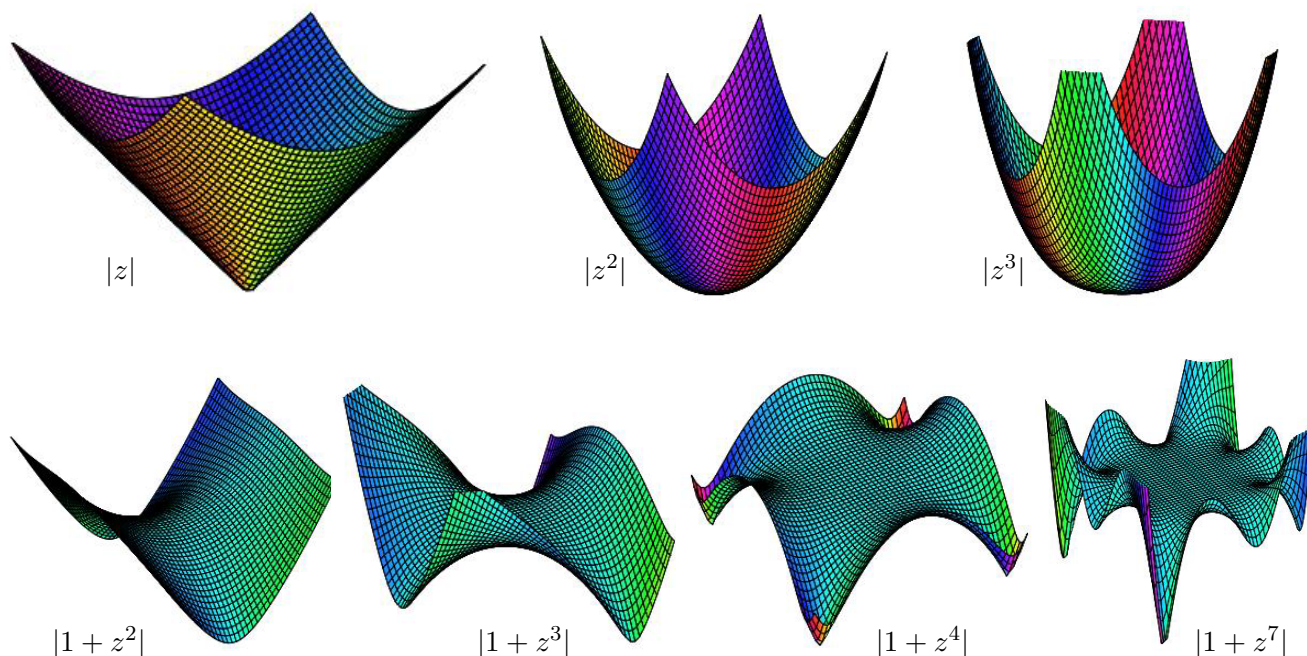
Les dessins sont ceux de la surface du module de l'intégrand pour $x = 8,5$, vue sous trois angles différents. On y voit deux cols, par lesquels on a bien envie de faire passer un lacet qui se dépêchera,

une fois un col passé, de plonger dans la plaine aussi rapidement que possible. Dans les dessins 1 et 3, l'axe positif est à l'est. Dans le deuxième, il est pointé vers le lecteur.



Qui sont ces cols ?

Si f est une fonction holomorphe sur un ouvert de $\mathbb{C}$, le graphe dans $\mathbb{R}^3$ de la fonction $|f|$ présente trois sortes de points. D'abord, les points à l'altitude 0 qui sont les zéros de f ; ils peuvent être arrondis ou pointus, selon que la dérivée s'annule aussi ou non. Ensuite, les points ordinaires qui ont un plan tangent non horizontal ; ce sont les points a pour lesquels $f(a) \neq 0$ et $f'(a) \neq 0$. Enfin, les points à tangente horizontale qui sont *toujours* des points cols, multiples ou non ; ce sont les points a pour lesquels $f(a) \neq 0$ et $f'(a) = 0$. La multiplicité du point col est le dernier entier m pour lequel $f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(m)}(a) = 0$. Si $m = 1$, c'est une selle de cheval qui ressemble au graphe en 0 de $|1 + z^2|$. Si $m = 2$, la métaphore du folklore demande à la selle de savoir accueillir la queue d'un singe ; la surface ressemble à celle de $|1 + z^3|$ autour de 0. Aucune bride à l'imagination de chacun n'est requise pour décrire les points cols de multiplicité 3, 4, *etc.* Dans les sept dessins qui suivent, l'axe positif est au nord-est.



Ce paysage de la surface du module des fonctions holomorphes est joliment décrit dans Le Livre. Pour se convaincre rapidement de cette étude locale, il suffit de deux ingrédients. Remarquer d'abord que $|1 + z| = 1 + \Re z + O(|z|^2)$ lorsque z est au voisinage de 0. Ensuite, développer la fonction holomorphe en série entière au voisinage du point étudié, et discuter de la forme de $|c_0 + c_1(z - a) + c_2(z - a)^2 + \dots|$ au voisinage de a .

Bref retour à l'exemple. On reprend J_1 . Le calcul de la dérivée de l'intégrand est immédiat. Les deux points selles (de cheval) de la surface de la fonction de Bessel sont, lorsque $x > 2$, les nombres $\frac{2}{x} \pm i\sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}$. Lorsque x tend vers l'infini, ils tendent vers i et $-i$. On pourrait faire passer un lacet par ces deux points, mais on ne le fait pas. A vrai dire, on ne se servira pas ici du calcul de ces cols-là.

Intégrer le long d'un lacet *ad hoc* passant par les cols.

On reprend l'intégrale de Laplace $\oint_{\gamma} \varphi(\zeta) e^{x\psi(\zeta)} d\zeta = \int_a^b \varphi(\gamma(t)) \gamma'(t) e^{x\psi(\gamma(t))} dt$ dont on cherche à établir l'asymptotique lorsque x tend vers $+\infty$. L'écriture sous forme paramétrée combinée avec la méthode de Laplace réelle indique que, le long de l'arc, lorsque la partie réelle de ψ a des maxima stricts, l'asymptotique de l'intégrale toute entière est déterminée par la valeur de φ et ψ au voisinage de ces maxima.

On se place au voisinage d'un point z_0 où φ et ψ sont holomorphes et on considère un (petit) segment qui passe par z_0 en faisant un angle θ avec l'axe réel positif. Il est paramétré par

$$\gamma(t) = z_0 + te^{i\theta}, \quad t \in [-\delta, \delta]$$

où $\delta > 0$. Au voisinage de $t = 0$, le long de ce segment, ψ se développe en

$$\psi(\gamma(t)) = \psi(z_0) + \psi'(z_0) te^{i\theta} + \frac{1}{2} \psi''(z_0) t^2 e^{2i\theta} + O(t^3).$$

A moins que $\cos \theta$ ne soit nul (on laisse cette hypothèse de côté, pas grave), la partie réelle de ψ n'atteint un maximum en z_0 que si $\psi'(z_0) = 0$, c'est-à-dire si z_0 est un point col de la surface que définit $|\psi|$. Si z_0 est un tel point col, ψ se développe, au voisinage de $t = 0$, le long du segment, selon

$$\psi(\gamma(t)) = \psi(z_0) + \frac{1}{2} \psi''(z_0) t^2 e^{2i\theta} + O(t^3).$$

On note

$$\psi''(z_0) = r_0 e^{i\theta_0}, \quad r_0 \geq 0.$$

Alors, le développement de la partie réelle de ψ s'écrit

$$\Re \psi(\gamma(t)) = \Re \psi(z_0) + \frac{1}{2} r_0 t^2 \cos(\theta_0 + 2\theta) + O(t^3).$$

A supposer que le col soit simple, c'est-à-dire que $\psi''(z_0) \neq 0$, la partie réelle de ψ le long du segment présente un maximum en z_0 lorsque $\cos(\theta_0 + 2\theta) < 0$, ce maximum étant le plus marqué lorsque $e^{i(\theta_0 + 2\theta)} = -1$. Les angles θ pour lesquels cela est vérifié sont les *directions de plus grande pente* (descendante) au voisinage du col. Lorsque θ est une direction de plus grande pente, le développement de ψ le long du segment s'écrit

$$\psi(\gamma(t)) = \psi(z_0) - \frac{1}{2} |\psi''(z_0)| t^2 + O(t^3).$$

Dans l'asymptotique de l'intégrale de Laplace, ce sont précisément les directions de plus grande pente qui l'emportent. On montre qu'au voisinage d'un tel point col, le long d'un bout arc γ_{z_0} tangent

à la direction de plus grande pente, la partie principale de l'intégrale s'obtient en remplaçant, dans l'intégrale, φ par $\varphi(z_0)$ et ψ par son développement de Taylor à l'ordre 2 :

$$\int_{\gamma_{z_0}} \varphi(\zeta) e^{x\psi(\zeta)} d\zeta \approx \int_{\gamma_{z_0}} \varphi(z_0) e^{x[\psi(z_0) + \frac{1}{2}\psi''(z_0)(\zeta-z_0)^2]} d\zeta \approx \varphi(z_0) e^{x\psi(z_0)} \int_{-\delta}^{\delta} e^{-\frac{1}{2}|\psi''(z_0)|t^2} e^{i\theta} dt,$$

la dernière intégrale venant de la paramétrisation du segment. Compte tenu du lemme 2, cette dernière intégrale a pour partie principale $\varphi(z_0) e^{x\psi(z_0)} e^{i\theta} \sqrt{\frac{2\pi}{x|\psi''(z_0)|}}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Il reste à compléter cette étude locale par une vision globale de l'intégrale curviligne. Dans le domaine d'holomorphic de φ et ψ , on déforme par homotopie le lacet d'intégration en le faisant passer par les points cols de ψ à l'altitude réelle maximale (les points critiques de ψ qui ont la même partie réelle maximale), en suivant les directions de plus grande pente orientées par le sens de parcours sur l'arc. S'il y a plusieurs cols à la même altitude réelle maximale, leurs contributions s'ajoutent.

On résume.

On est en présence de deux fonctions holomorphes φ et ψ et d'un arc γ dont le support est contenu dans le domaine d'holomorphic de ces fonctions. On cherche à étudier l'asymptotique de

$$\oint_{\gamma} \varphi e^{x\psi}$$

lorsque x tend vers $+\infty$.

(i) On repère les points cols de ψ susceptibles de se trouver sur la route d'arcs homotopes à γ . Ils sont donnés par l'équation

$$\psi'(z_0) = 0.$$

Parmi eux, on ne garde que ceux pour lesquels $\Re(\psi)$ est maximale. Pour simplifier, on suppose ici que ce point col maximal est unique et simple, ce qui signifie que

$$\psi''(z_0) \neq 0.$$

(ii) On calcule la direction de plus grande pente du col. C'est l'angle (non orienté) $\theta \in [0, \pi[$ donné par l'équation

$$\psi''(z_0) e^{2i\theta} < 0.$$

Le choix du vrai angle orienté θ est déterminé par le sens de parcours d'un arc homotope à γ passant par z_0 .

(iii) Dans ces conditions, l'intégrale curviligne de Laplace admet un développement complet dans l'échelle des $x^\alpha e^{x\psi(z_0)}$. Sa partie principale est

$$\oint_{\gamma} \varphi(\zeta) e^{x\psi(\zeta)} d\zeta \approx \varphi(z_0) e^{x\psi(z_0)} e^{i\theta} \sqrt{\frac{2\pi}{x|\psi''(z_0)|}}.$$

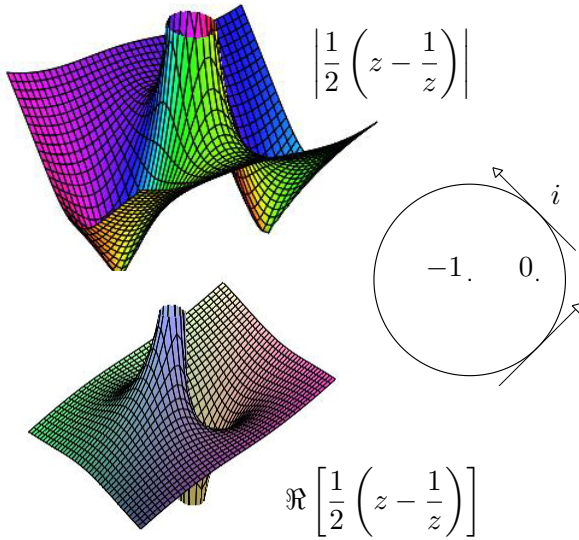
(iv) Lorsque plusieurs points cols maximisent $\Re\psi$, les contributions à l'asymptotique d'un arc passant par eux s'ajoutent.

Fin de l'exemple.

On reprend la fonction de Bessel

$$J_1(x) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\gamma} e^{\frac{x}{2}(\zeta - \zeta^{-1})} \frac{d\zeta}{\zeta^2}$$

dont on cherche l'asymptotique en $+\infty$. Le domaine d'holomorphic de l'intégrand est $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. L'arc d'intégration est, par exemple, n'importe quel cercle simple et direct tournant autour de l'origine. On



cherche les points cols de $\psi(\zeta) = \frac{1}{2} \left(\zeta - \frac{1}{\zeta} \right)$. On dérive, on trouve i et $-i$. Comme $\psi(i) = i$ et $\psi(-i) = -i$ ont la même partie réelle, les deux cols contribueront à l'asymptotique. Calcul de la dérivée seconde : $\psi''(i) = -i$ et $\psi''(-i) = i$. On cherche la direction de plus grande pente en i : c'est l'angle non orienté θ qui vérifie $-ie^{2i\theta} < 0$, c'est-à-dire $\theta = \frac{-\pi}{4} [\pi]$. De même, la direction de plus grande pente en $-i$ est $\theta = \frac{\pi}{4} [\pi]$. Ainsi, on choisit comme arc d'intégration un arc simple et direct passant par i et $-i$, tangent en ces points aux directions de plus grande pente : le cercle de centre -1 et de rayon $\sqrt{2}$ convient. Les axes de plus grande pente sont déterminés par le sens de parcours : en i , $\theta = \frac{3\pi}{4} [2\pi]$; en $-i$, $\theta = \frac{\pi}{4} [2\pi]$. Dans le dessin des surfaces, l'axe positif est au nord-est.

On peut enfin écrire le terme principal de l'asymptotique de J_1 en $+\infty$:

$$J_1(x) \approx \frac{1}{2i\pi} \left[\frac{1}{i^2} e^{ix} e^{\frac{3i\pi}{4}} \sqrt{\frac{2\pi}{x}} + \frac{1}{(-i)^2} e^{-ix} e^{\frac{i\pi}{4}} \sqrt{\frac{2\pi}{x}} \right] = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left(x - \frac{3\pi}{4} \right).$$

En analysant plus finement, on montrerait que $J_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left(x - \frac{3\pi}{4} \right) + O(x^{-3/2})$.

Exemple : densité d'une moyenne empirique.

Soient X une variable aléatoire réelle et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes ayant toutes la loi de X . On s'intéresse à la distribution de la moyenne empirique $\frac{1}{n} (X_1 + \dots + X_n)$, et notamment à son asymptotique lorsque n tend vers $+\infty$. On suppose sans raffiner que X a toutes les propriétés dont on a besoin dans le raisonnement ci-dessous ; notamment, elle admet f_X pour densité sur $\mathbb{R}$ et cette densité est donnée par inversion de Fourier, selon les formules

$$\mathbf{E} e^{itX} = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f_X(x) dx \quad \text{et} \quad f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \mathbf{E} e^{itX} dt.$$

Dans ces conditions, la moyenne empirique a pour densité la fonction

$$f_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \mathbf{E} e^{i \frac{t}{n} (X_1 + \dots + X_n)} dt = \frac{n}{2i\pi} \oint_{\gamma} e^{n[\Lambda(\zeta) - x\zeta]} d\zeta$$

où l'arc d'intégration est l'axe imaginaire pur parcouru une fois vers le nord. On a noté $\Lambda(z) = \log \mathbf{E} (e^{zX})$ la log-Laplace de la variable réelle X que l'on suppose holomorphe au voisinage de l'axe imaginaire. x fixé, on cherche l'asymptotique de cette intégrale lorsque n tend vers $+\infty$. On est pile dans le cadre de la méthode de Laplace. La dérivée de l'exposant $\psi(\zeta) = \Lambda(\zeta) - x\zeta$ est $\Lambda'(\zeta) - x$. En admettant que le seul zéro complexe de cette dérivée soit un réel noté t^* (à vrai dire, Λ est toujours convexe dans le champ réel, c'est du Cauchy-Schwarz), ce réel t^* est ainsi le seul point col de l'exposant. Si Λ est suffisamment holomorphe, par exemple dans une bande verticale ouverte contenant 0 et t^* , on peut déformer par homotopie l'axe imaginaire en un arc qui passe par t^* sans modifier la valeur de l'intégrale. En t^* , on a $\psi(t^*) = \Lambda(t^*) - xt^*$ et $\psi''(t^*) = \Lambda''(t^*)$. Comme Λ est convexe sur $\mathbb{R}$, ce nombre est positif, ce qui montre que la direction de plus grande pente en le point col t^* est $\frac{\pi}{2} [\pi]$. Compte tenu du sens de parcours de l'arc, on obtient $\theta = \pi/2$, c'est-à-dire $e^{i\theta} = i$. La méthode de Laplace donne alors, lorsque n tend vers $+\infty$,

$$f_n(x) = \frac{n}{2i\pi} e^{n[\Lambda(t^*) - xt^*]} i \sqrt{\frac{2\pi}{n\Lambda''(t^*)}} \left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right] = \sqrt{\frac{n}{2\pi\Lambda''(t^*)}} e^{-n\Lambda^*(x)} \left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right],$$

où on a noté $\Lambda^*(x) = \sup_t (tx - \Lambda(t)) = t^*x - \Lambda(t^*)$ la transformée de Legendre de Λ .

Exercice pour probabilistes : quelles hypothèses doit-on imposer à X pour que cet argument tienne ?

5.3 Cols en combinatoire analytique

En combinatoire analytique, deux intégrales, l'une venant directement de la formule de Cauchy, l'autre de l'inversion de Lagrange occupent le devant de la scène :

$$\frac{1}{2i\pi} \oint \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta \quad \text{et} \quad \frac{1}{2in\pi} \oint \frac{\phi^n(\zeta)}{\zeta^n} d\zeta$$

dont on cherche l'asymptotique lorsque n tend vers l'infini (terme principal, voire développement complet). Le Livre développe longuement la façon dont la méthode du col se déroule (quand elle s'applique) dans ces situations. Pas question ici de reprendre cet argumentaire.

Sans entrer dans le détail, une tendance se dessine : quand on a une telle intégrale à évaluer, on peut d'abord chercher les points cols de l'intégrand tout entier (les nombres complexes où sa dérivée s'annule). Déformer le lacet par homotopie de sorte qu'il passe par ces points cols conduit souvent à des situations qui, elles, tombent dans l'escarcelle des méthodes de Laplace.

Exemple.

Exemple ultra-célèbre, mais traité un peu autrement dans Le Livre, on cherche à $\text{re}^{\aleph_0}$ -calculer un équivalent de $\binom{2n}{n}$ en l'infini.

On l'écrit $\binom{2n}{n} = [z^n] (1+z)^{2n} = \frac{1}{2i\pi} \oint (1+\zeta)^{2n} \frac{d\zeta}{\zeta^{n+1}}$ le long d'un cercle simple et direct autour de l'origine. On peut être tenté d'écrire l'intégrand sous la forme $\frac{1}{\zeta} e^{n\psi(\zeta)}$ où $\psi(\zeta) = 2\log(1+\zeta) - \log \zeta$, mais on est ennuyé par le défaut d'holomorphic du logarithme au franchissement de l'axe négatif. On fait pourtant comme si, et on cherche les points cols de ψ ; on en trouve un seul : 1 et on décide d'intégrer le long du cercle unité simple et direct :

$$\binom{2n}{n} = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{O}} (1+\zeta)^{2n} \frac{d\zeta}{\zeta^{n+1}}.$$

Ce cercle passe par -1 qui gêne l'holomorphic. Mais l'intégrand s'annule en ce point, et les contributions des voisinages de -1 le long du cercle sont exponentiellement décroissantes vers 0. Ainsi, grossièrement, quand n tend vers l'infini,

$$\binom{2n}{n} = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{O}} (1+\zeta)^{2n} \frac{d\zeta}{\zeta^{n+1}} + o(1).$$

Comme ψ est holomorphe dans le plan coupé standard, plus rien ne gêne l'écriture de l'intégrand sous forme exponentielle et l'application de la méthode de Laplace à

$$\binom{2n}{n} = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{O}} \frac{1}{\zeta} e^{n\psi(\zeta)} + o(1).$$

On galope : un unique point col dans le plan coupé : 1. On calcule $\psi(1) = 2\log 2$ et $\psi''(1) = 1/2$. La direction de plus grande pente est $\pi/2$ [π], l'angle de plus grande pente est $\theta = \pi/2$ au vu du sens de parcours de l'arc. On trouve ainsi le terme principal du développement de $\binom{2n}{n}$ que chacun connaît :

$$\binom{2n}{n} \approx \frac{1}{2i\pi} e^{2n \log 2} e^{i\pi/2} \sqrt{\frac{2\pi}{n/2}} = \frac{4^n}{\sqrt{n\pi}}.$$

6 Exercices

1- Des cols

Démontrer la formule de Stirling à partir d'une intégrale curviligne

$$\frac{1}{n!} = \frac{1}{2i\pi} \oint \frac{e^z}{z^{n+1}} dz,$$

en choisissant un contour d'intégration *ad hoc* (deux applications successives d'une affaire de col).

[Hint : chercher un col pour l'intégrand, choisir un cercle d'intégration, écrire la forme paramétrée de l'intégrale, appliquer la méthode (complexe) de Laplace.]

2- Des cols pour la fonction d'Airy

On note $\text{Ai}(x)$ la fonction d'Airy, solution de l'équation différentielle $y'' = xy$ définie sur $\mathbb{R}$ par l'intégrale semi-convergente

$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \cos\left(\frac{t^3}{3} + xt\right) dt.$$

Montrer que Ai est aussi l'intégrale curviligne

$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{i\mathbb{R}} e^{\frac{\zeta^3}{3} - x\zeta} d\zeta$$

le long de l'axe imaginaire parcouru une fois vers le nord. En déduire que, lorsque x tend vers $+\infty$,

$$\text{Ai}(x) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{x}} e^{-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}}.$$

Montrer aussi que, lorsque x tend vers $+\infty$,

$$\text{Ai}(-x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{x}} \sin\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{4}\right) + o\left(x^{-1/4}\right).$$

[Hint : Selon le signe de x , chercher les cols de l'intégrand complet puis choisir un contour qui y passe. On tombe sur des Laplacieries. Pour les courageux : affiner le $o\left(x^{-1/4}\right)$ en $O\left(x^{-7/4}\right)$.]

3- Singularité essentielle

Montrer, par la méthode du col, que, lorsque n tend vers $+\infty$,

$$[z^n] \exp\left(\frac{1}{1-z}\right) \sim \frac{1}{2} \sqrt{\frac{e}{\pi}} \frac{e^{2\sqrt{n}}}{n^{3/4}}.$$

[Hint : Partir de la formule de Cauchy, écrire l'intégrand sous forme exponentielle, chercher le col de l'exposant (il dépend de n), faire passer un lacet par ce col (par exemple, une droite verticale), évaluer à la Laplace l'intégrale qui en résulte.]

4- Un produit infini

Trouver les singularités de la série génératrice des carrés dans les groupes des permutations finis

$$f(z) = \sqrt{\frac{1+z}{1-z}} \prod_{n \geq 1} \cosh\left(\frac{z^{2n}}{2n}\right).$$

Quel est le terme principal dans l'asymptotique de ses coefficients de Taylor en 0 ?

[Hint : comme on le dit dans le cours, réécrire le produit avec des polylogarithmes et mélanger le théorème de transfert avec la méthode de Darboux.]

5- Théorème des quatre carrés

Partir de la formule du produit triple de Jacobi

$$\prod_{m \geq 1} (1 - x^{2m}) (1 - x^{2m-1}y^2) (1 - x^{2m-1}y^{-2}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x^{n^2} y^{2n}$$

pour trouver, par une méthode du col, un équivalent lorsque n tend vers l'infini du nombre de façons dont on peut écrire n comme une somme de quatre carrés.

[Hint : exo spécial Bruno pour ne pas qu'il s'ennuie à la séance d'exercices.]

Chacun sait par ailleurs que Jacobi (enfin, je crois que c'est lui) a trouvé une formule exacte de ce nombre. C'est 8 fois la somme des diviseurs de n qui ne sont pas divisibles par 4. Voir le riche livre d'arithmétique de Hardy et Wright pour en savoir plus.

7 Une toute petite petite biblio

Le Livre : Flajolet et Sedgewick, *Analytic combinatorics*, Cambridge University Press, 2009.

[Rudin] Rudin, *Real and complex analysis*, McGraw-Hill International Editions, 1921 (pour la première édition).

[Titchmarsh] Titchmarsh, *The theory of functions*, Oxford University Press, 1932 (pour la première édition).

[Hybride] Flajolet, Fusy, Gourdon, Panario, Pouyanne, *A hybrid of Darboux's method and singularity analysis in combinatorial asymptotics*, EJC, 2006.

A conseiller : Needham, *Visual complex analysis*, Oxford University Press, 1997.