Probabilités multivariées de Jonglage

arxiv:1402.3752

Exposé court ALEA

François Nunzi
joint work with Arvind Ayyer, Jérémie Bouttier and Sylvie Corteel

Paris 7 ; LIAFA

Mardi 18 Mars 2014

Présentation du modèle

Un état de jonglage, hauteur $h = 8$, nombre d'espaces libres $k = 4$, nombre de balles $\ell = h - k = 4$:

$$\circ \quad \circ \quad \bullet \quad \circ \quad \bullet \quad \bullet \quad \circ \quad \bullet$$

Présentation du modèle

Un état de jonglage, hauteur $h = 8$, nombre d'espaces libres $k = 4$, nombre de balles $\ell = h - k = 4$:

$$\circ \quad \bullet \quad \circ \quad \bullet \quad \bullet \quad \circ \quad \bullet \quad \circ$$

Présentation du modèle

Un état de jonglage, hauteur $h = 8$, nombre d'espaces libres $k = 4$, nombre de balles $\ell = h - k = 4$:

$$\bullet \quad \circ \quad \bullet \quad \bullet \quad \circ \quad \bullet \quad \circ \quad \circ$$

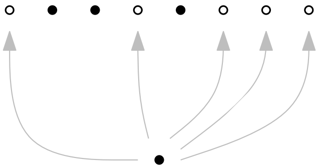
Présentation du modèle

Un état de jonglage, hauteur $h = 8$, nombre d'espaces libres $k = 4$, nombre de balles $\ell = h - k = 4$:

$$\circ \quad \bullet \quad \bullet \quad \circ \quad \bullet \quad \circ \quad \circ \quad \circ$$

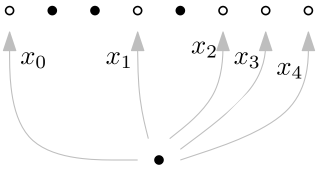
Présentation du modèle

Un état de jonglage, hauteur $h = 8$, nombre d'espaces libres $k = 4$, nombre de balles $\ell = h - k = 4$:



Présentation du modèle

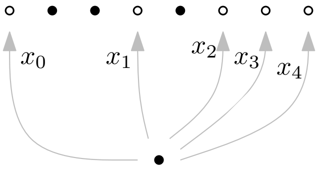
Un état de jonglage, hauteur $h = 8$, nombre d'espaces libres $k = 4$, nombre de balles $\ell = h - k = 4$:



avec $x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$

Présentation du modèle

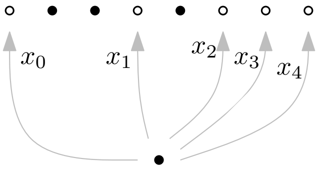
Un état de jonglage, hauteur $h = 8$, nombre d'espaces libres $k = 4$, nombre de balles $\ell = h - k = 4$:



avec $x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$
On note $St_{h,k}$ l'ensemble des états de jonglage de hauteur h présentant k espaces libres.

Présentation du modèle

Un état de jonglage, hauteur $h = 8$, nombre d'espaces libres $k = 4$, nombre de balles $\ell = h - k = 4$:



avec $x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$
On note $St_{h,k}$ l'ensemble des états de jonglage de hauteur h présentant k espaces libres.
Si on fixe $x_i = \frac{1}{k+1}$ pour tout i, on retrouve le modèle étudié par G.S. Warrington dans son article Juggling Probabilities.

Exemple

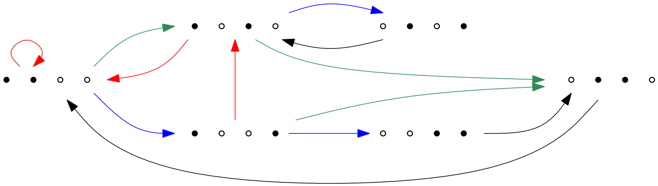


Figure: $St_{4,2}$ (notation abusive). Les flèches noires représentent les transitions de probabilité 1, les rouges x_0, vertes x_1, bleues x_2.

Exemple

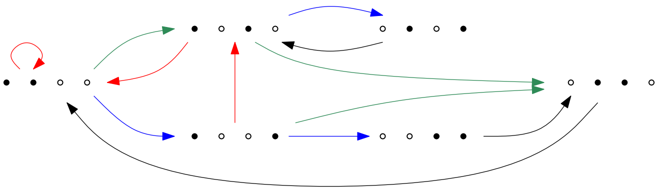


Figure: $St_{4,2}$ (notation abusive). Les flèches noires représentent les transitions de probabilité 1, les rouges x_0, vertes x_1, bleues x_2.

La matrice de transition de cette chaîne de Markov dans la base (●●○○, ●○●○, ●○○●, ○●●○, ○●○●, ○○●●) :

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & 0 & 0 & 0 \\ x_0 & 0 & 0 & x_1 & x_2 & 0 \\ 0 & x_0 & 0 & x_1 & 0 & x_2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple

La matrice de transition de cette chaîne de Markov dans la base $(\bullet\bullet\circ\circ, \bullet\circ\bullet\circ, \bullet\circ\circ\bullet, \circ\bullet\bullet\circ, \circ\bullet\circ\bullet, \circ\circ\bullet\bullet)$:

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & 0 & 0 & 0 \\ x_0 & 0 & 0 & x_1 & x_2 & 0 \\ 0 & x_0 & 0 & x_1 & 0 & x_2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Un vecteur propre (à gauche) de cette matrice est :

$$(1, x_1 + x_2, x_2, (x_1 + x_2)^2, x_2(x_1 + x_2), x_2^2)$$

Exemple

$$\begin{pmatrix} \bullet\ \bullet\ \circ\circ & \bullet\ \circ\ \bullet\circ & \bullet\ \circ\ \circ\bullet & \circ\ \bullet\ \bullet\circ & \circ\ \bullet\ \circ\bullet & \circ\ \circ\ \bullet\bullet \\ 1 & x_1 + x_2 & x_2 & (x_1 + x_2)^2 & x_2(x_1 + x_2) & x_2^2 \end{pmatrix}$$

Le théorème

On suppose dans la suite que $x_0 > 0$ (unicité de la classe communicante et apériodicité).
Soit $B \in St_{h,k}$, on l'écrit comme un mot $B = b_1 \ldots b_h$ sur l'alphabet $\{\circ, \bullet\}$.

Théorème

La distribution stationnaire π de $St_{h,k}$ est donnée par :

$$\pi(B) = \frac{1}{Z_{h,k}} \prod_{\substack{i \in \{1,\ldots,h\} \\ b_i = \bullet}} \left(x_{E_i(B)} + \cdots + x_k \right)$$

où $E_i(B) = \#\{j < i, b_j = \circ\}$

Le théorème

Théorème

La distribution stationnaire π de $St_{h,k}$ est donnée par :

$$\pi(B) = \frac{1}{Z_{h,k}} \prod_{\substack{i\in\{1,\dots,h\} \\ b_i=\bullet}} \left(x_{E_i(B)} + \cdots + x_k\right)$$

où $E_i(B) = \#\{j < i, b_j = \circ\}$

Remarques :

• Cette formule s'exprime plus simplement en termes de partitions d'entiers

Le théorème

Théorème

La distribution stationnaire π de $St_{h,k}$ est donnée par :

$$\pi(B) = \frac{1}{Z_{h,k}} \prod_{\substack{i \in \{1,\dots,h\} \\ b_i = \bullet}} \left(x_{E_i(B)} + \cdots + x_k \right)$$

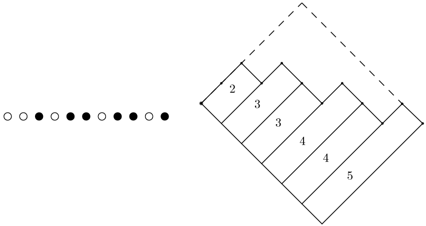
où $E_i(B) = \#\{j < i, b_j = \circ\}$

Remarques :

• Cette formule s'exprime plus simplement en termes de partitions d'entiers

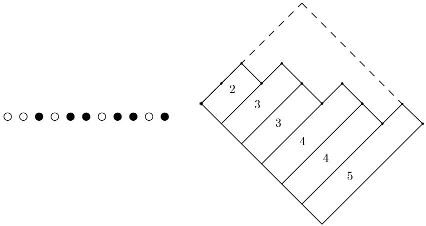
• On aimerait savoir interpréter chacun des monômes qui apparaissent dans cette formule

Partitions d'entiers



Bijection naturelle entre $St_{h,k}$ et $Par_{k,(h-k)}$ les partitions d'entiers dont le diagramme de Young rentre dans un rectangle de taille $k * (h-k)$

Partitions d'entiers



On pose, pour tout $0 \leq i \leq k$, $y_i = \sum_{j=i}^{k} x_i$.

Théorème

La distribution stationnaire de la chaîne de Markov induite par $St_{h,k}$ sur $Par_{k,\ell}$ est donné par :

$$\pi(\lambda) = \frac{1}{Z_{h,k}} \prod_{i=1}^{\ell} y_{\lambda_i}$$

Remarques :

• $Z_{h,k}$ s'exprime de manière simple comme un polynôme symétrique en les y_i.

Remarques :

• $Z_{h,k}$ s'exprime de manière simple comme un polynôme symétrique en les y_i.
• Le Théorème s'étend naturellement au cas où les partitions ne sont pas confinées dans un rectangle. Celà correspond à jongler sans limite de hauteur et/ou à faire tendre le nombre de balles vers l'infini.

Remarques :

• $Z_{h,k}$ s'exprime de manière simple comme un polynôme symétrique en les y_i.

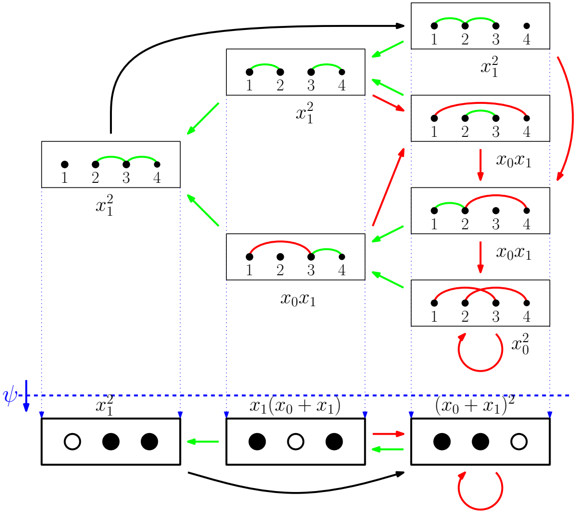
• Le Théorème s'étend naturellement au cas où les partitions ne sont pas confinées dans un rectangle. Celà correspond à jongler sans limite de hauteur et/ou à faire tendre le nombre de balles vers l'infini.

• Dans le cas d'un nombre infini d'espaces libres, la mesure stationnaire est finie si et seulement si $\sum_{i\geq 0} ix_i = \sum_{i\geq 0} y_i < \infty$.

Remarques :

• $Z_{h,k}$ s'exprime de manière simple comme un polynôme symétrique en les y_i.
• Le Théorème s'étend naturellement au cas où les partitions ne sont pas confinées dans un rectangle. Celà correspond à jongler sans limite de hauteur et/ou à faire tendre le nombre de balles vers l'infini.
• Dans le cas d'un nombre infini d'espaces libres, la mesure stationnaire est finie si et seulement si $\sum_{i \geq 0} ix_i = \sum_{i \geq 0} y_i < \infty$.
• Si on fixe $x_i = (1-q)q^i$, une partition de taille n sera de poids $q^n/F(q)$ avec F est la série génératrice des partitions d'entiers.

Chaîne enrichie sur les partitions d'ensembles



Entrelacement

On pose $H = h + 1$ et $K = k + 1$ On note $\mathcal{S}_{H,K}$ l'ensemble des partitions de H éléments en K parties et (abus) la chaîne de Markov décrite dessus.

Entrelacement

On pose $H = h + 1$ et $K = k + 1$ On note $\mathcal{S}_{H,K}$ l'ensemble des partitions de H éléments en K parties et (abus) la chaîne de Markov décrite dessus.

Théorème

Soit $\sigma \in \mathcal{S}_{H,K}$ Une mesure stationnaire non normalisée de la chaîne de Markov enrichie est donnée par :

$$\tilde{w}(\sigma) = \prod_{(s,t) \text{ arche de } \sigma} x_{K - C_\sigma(s,t)}.$$

Entrelacement

On pose $H = h + 1$ et $K = k + 1$ On note $\mathcal{S}_{H,K}$ l'ensemble des partitions de H éléments en K parties et (abus) la chaîne de Markov décrite dessus.

Théorème

Soit $\sigma \in \mathcal{S}_{H,K}$ Une mesure stationnaire non normalisée de la chaîne de Markov enrichie est donnée par :

$$\tilde{w}(\sigma) = \prod_{(s,t) \text{ arche de } \sigma} x_{K - C_\sigma(s,t)}.$$

Remarque

- Les termes ainsi obtenus sont bien des monômes en les x_i.

Entrelacement

On pose $H = h + 1$ et $K = k + 1$ On note $\mathcal{S}_{H,K}$ l'ensemble des partitions de H éléments en K parties et (abus) la chaîne de Markov décrite dessus.

Théorème

Soit $\sigma \in \mathcal{S}_{H,K}$ Une mesure stationnaire non normalisée de la chaîne de Markov enrichie est donnée par :

$$\tilde{w}(\sigma) = \prod_{(s,t) \text{ arche de } \sigma} x_{K - C_\sigma(s,t)}.$$

Remarque

• Les termes ainsi obtenus sont bien des monômes en les x_i.

• Prochaîne étape : que se passe-t-il si on ne fixe plus le nombre de parties ?

Jonglage avec un nombre variable de balles

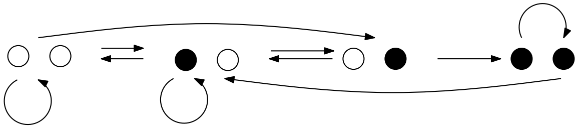


Figure: Le graphe de transition pour $h = 2$.

Jonglage avec un nombre variable de balles

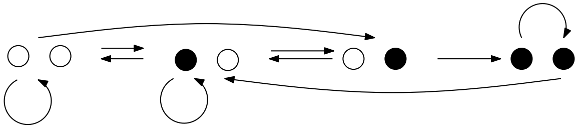


Figure: Le graphe de transition pour $h = 2$.

Avec les bonnes probabilités de transition, on observe un phénomène de *convergence ultrarapide* : l'état stationnaire est atteint en un nombre fini d'étapes.