Automates cellulaires probabilistes à loi invariante markovienne

Jérôme Casse
Jean-François Marckert

CNRS, LaBRI, Université de Bordeaux

19 mars 2014

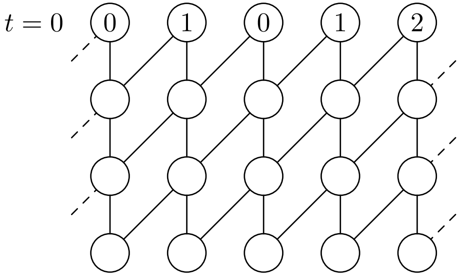
Automate cellulaire déterministe

Définition

$E_\kappa = \{0, \ldots, \kappa\}$ un *alphabet*.

$$f : \begin{array}{ccc} E_\kappa^2 & \longrightarrow & E_\kappa \\ (a, b) & \longmapsto & c \end{array}$$ une *règle locale*.

L'*automate cellulaire* $A : E_\kappa^{\mathbb{Z}} \longrightarrow E_\kappa^{\mathbb{Z}}$ avec $w'_i = f(w_i, w_{i+1})$.



- $\kappa = 2$
- $f(a, b) = a + b \mod 3$.

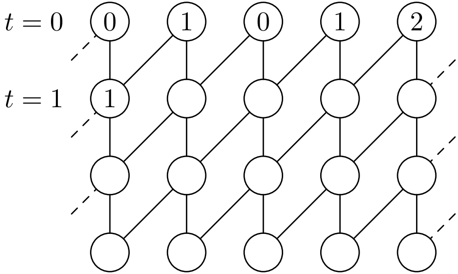
Automate cellulaire déterministe

Définition

$E_\kappa = \{0, \ldots, \kappa\}$ un *alphabet*.

$$f : \begin{array}{ccc} E_\kappa^2 & \longrightarrow & E_\kappa \\ (a,b) & \longmapsto & c \end{array}$$ une *règle locale*.

L'*automate cellulaire* $A : E_\kappa^{\mathbb{Z}} \longrightarrow E_\kappa^{\mathbb{Z}}$ avec $w'_i = f(w_i, w_{i+1})$.



- $\kappa = 2$
- $f(a,b) = a + b \mod 3$.

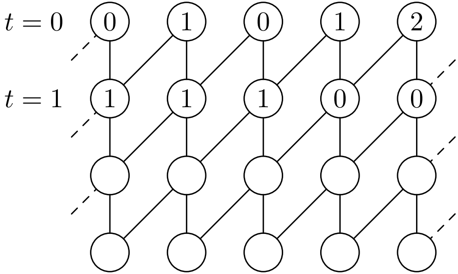
Automate cellulaire déterministe

Définition

$E_\kappa = \{0, \ldots, \kappa\}$ un *alphabet*.

$$f : \begin{array}{ccc} E_\kappa^2 & \longrightarrow & E_\kappa \\ (a, b) & \longmapsto & c \end{array}$$ une *règle locale*.

L'*automate cellulaire* $A : E_\kappa^{\mathbb{Z}} \longrightarrow E_\kappa^{\mathbb{Z}}$ avec $w'_i = f(w_i, w_{i+1})$.



- $\kappa = 2$
- $f(a, b) = a + b \mod 3$.

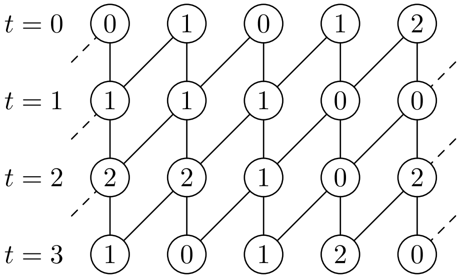
Automate cellulaire déterministe

Définition

$E_\kappa = \{0, \ldots, \kappa\}$ un *alphabet*.

$$f : \begin{array}{ccc} E_\kappa^2 & \longrightarrow & E_\kappa \\ (a,b) & \longmapsto & c \end{array}$$ une *règle locale*.

L'*automate cellulaire* $A : E_\kappa^{\mathbb{Z}} \longrightarrow E_\kappa^{\mathbb{Z}}$ avec $w'_i = f(w_i, w_{i+1})$.



- $\kappa = 2$
- $f(a, b) = a + b \mod 3$.

Automate cellulaire probabiliste (ACP)

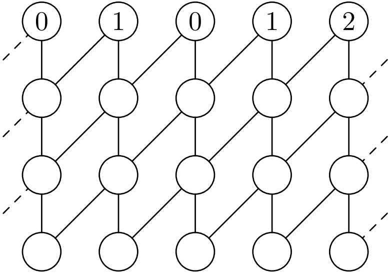
f est remplacée par une *dynamique locale aléatoire* T où

$$T_{\substack{a,b\\c}} = P\left(\begin{tikzcd} a \arrow[d, no head] & b \arrow[dl, no head] \\ c & \end{tikzcd} \middle| \begin{tikzcd} a \arrow[d, no head] & b \arrow[dl, no head] \\ \bigcirc & \end{tikzcd} \right).$$

Exemple d'un ACP

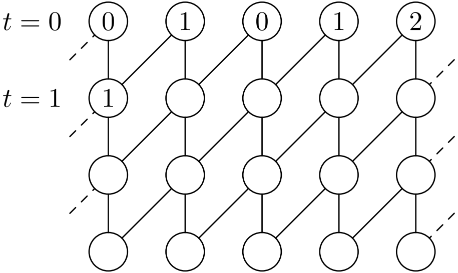
- $\kappa = 2$.
- $T_{\substack{a,b\\c}} = \underbrace{\mathbf{1}_{\{c=a+b \mod 3\}} p}_{\text{avec proba } p\text{, on fait le calcul d'avant}} + \underbrace{\frac{1-p}{3}}_{\text{avec proba } 1-p\text{, on tire au hasard}}.$

$t = 0$



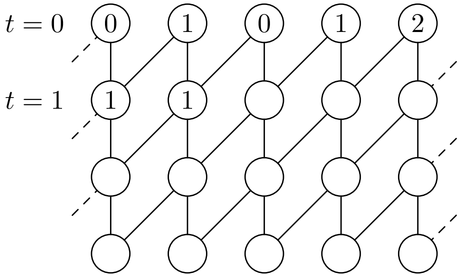
Exemple d'un ACP

- $\kappa = 2$.
- $T_{\substack{a,b\\c}} = \underbrace{\mathbf{1}_{\{c=a+b \mod 3\}} p}_{\text{avec proba } p, \text{ on fait le calcul d'avant}} + \underbrace{\frac{1-p}{3}}_{\text{avec proba } 1-p, \text{ on tire au hasard}}$.



Exemple d'un ACP

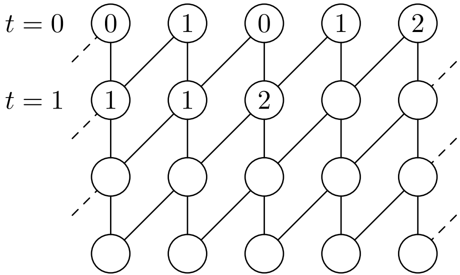
- $\kappa = 2$.
- $T_{\substack{a,b\\c}} = \underbrace{\mathbf{1}_{\{c=a+b \mod 3\}} p}_{\text{avec proba } p\text{, on fait le calcul d'avant}} + \underbrace{\frac{1-p}{3}}_{\text{avec proba } 1-p\text{, on tire au hasard}}.$



F, $\boxed{1}$.

Exemple d'un ACP

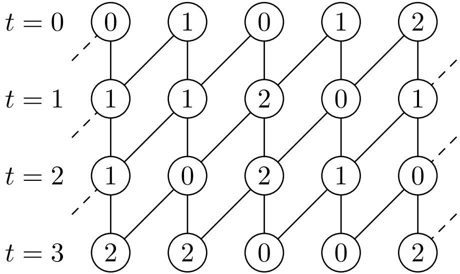
- $\kappa = 2$.
- $$T_{\substack{a,b\\c}} = \underbrace{\mathbf{1}_{\{c=a+b \mod 3\}}p}_{\text{avec proba } p\text{, on fait le calcul d'avant}} + \underbrace{\frac{1-p}{3}}_{\text{avec proba } 1-p\text{, on tire au hasard}}.$$



$F, \boxed{2}.$

Exemple d'un ACP

- $\kappa = 2$.
- $T_{\substack{a,b\\c}} = \underbrace{\mathbf{1}_{\{c=a+b \mod 3\}}p}_{\text{avec proba } p \text{, on fait le calcul d'avant}} + \underbrace{\frac{1-p}{3}}_{\text{avec proba } 1-p\text{, on tire au hasard}}.$



Automate cellulaire probabiliste (ACP)

Formellement,

$$\text{ACP agit sur les mesures sur } E_\kappa^{\mathbb{Z}}.$$

- Si, sur la ligne t, on a la loi μ,
  alors, sur la ligne $t+1$, on a la loi ν,

$$\nu(b_1, \ldots, b_k) = \sum_{a \in E_\kappa^{k+1}} \mu(a) \prod_{i=1}^{k} T_{\substack{a_i, a_{i+1} \\ b_i}}.$$

Intérêts des automates cellulaires probabilistes

- Combinatoire : dénombrement des animaux dirigés.
- Physique statistique : modèles à particules dures, Ising.

Loi invariante par un ACP

Définition

μ est invariante par A si l'image de μ est μ.

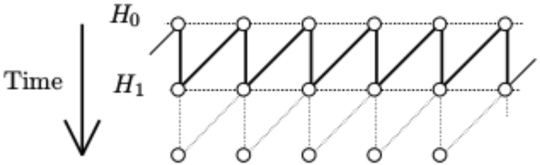
Littérature sur les ACP et leurs lois invariantes

- Étude des ACP à loi invariante markovienne :
  Belyaev & al. (1969) ; Toom & al. (1990) ; Bousquet-Mélou (1998).
- Aussi connus sous le nom de modèles de gaz en combinatoire :
  Dhar (1982) ; Viennot (1986) ; Bétréma et Penaud (1993) ; Bousquet-Mélou (1998) ; Le Borgne et Marckert (2007) ; Albenque (2009) ; Marckert (2012).
- Étude des ACP à loi invariante gibbsienne :
  Dai-Pra, Louis et Roelly (2001).
- Étude des ACP à loi invariante iid :
  Mairesse et Marcovici (2012) (2014).
- Unicité de la mesure invariante pour les ACP à taux strictement positifs dans le cas $\kappa = 1$ n'est pas connue.

Structures

Deux structures :

- la ligne horizontale (H),
- le zig-zag horizontal (HZ).



Objectif de l'exposé

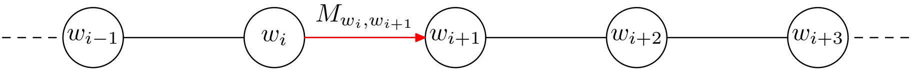
- On va décrire l'ensemble des ACP qui possède une chaîne de Markov comme loi invariante.

Chaîne de Markov sur H

Définition

Soit $(M_{a,b})_{a,b\in E_\kappa}$ une matrice de probabilité. La chaîne de Markov de noyau M sur H est une mesure sur H qui vérifie

$$P(W_{i+1} = w_{i+1} | W_i = w_i, W_{i-1} = w_{i-1}, \ldots) = P(W_{i+1} = w_{i+1} | W_i = w_i) = M_{w_i, w_{i+1}}.$$



Chaîne de Markov sur HZ

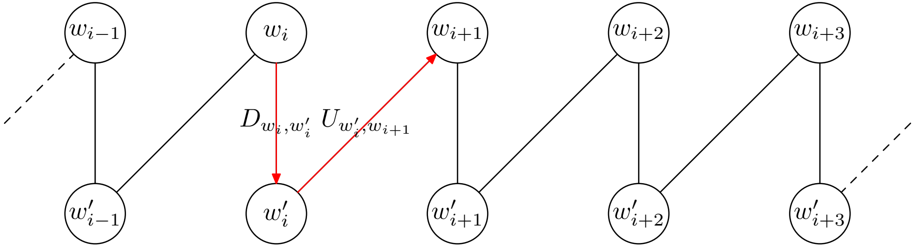
Définition

Soient $(D_{a,b})_{a,b\in E_\kappa}$ et $(U_{a,b})_{a,b\in E_\kappa}$ deux matrices de probabilité. La chaîne de Markov de noyaux (D, U) sur HZ est une mesure sur HZ qui vérifie

$$P\left(W'_i = w'_i | W_i = w_i, W'_{i-1} = w'_{i-1}, \dots\right) = D_{w_i,w'_i}$$

et

$$P\left(W_{i+1} = w_{i+1} | W'_i = w'_i, W_i = w_i, \dots\right) = U_{w'_i,w_{i+1}}.$$



ACP à taux strictement positifs

Définition

Un ACP à taux strictement positifs vérifie : pour tous a, b, c,

$$T_{\substack{a,b\\c}} > 0.$$

Objectif de l'exposé

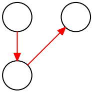
- On va décrire l'ensemble des ACP qui possède une chaîne de Markov comme loi invariante.

Lemme 16.2 de Toom & al. (1990)

Lemme

$M = DU = UD$ avec U et D deux matrices stochastiques de taille $n \times n$. Alors la chaîne de Markov M est invariante par A si pour tous a, b, c,

$$T_{\substack{a,b \\ c}} = \frac{D_{a,c} U_{c,b}}{M_{a,b}}.$$



Belyaev & al. (1969)

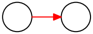
Théorème

Soit $A = (\mathbb{Z}, E_1, T)$ *un ACP. A admet une chaîne de Markov invariante ssi :*

(i) $T_{\substack{0,0\\0}} T_{\substack{1,1\\0}} T_{\substack{1,0\\1}} T_{\substack{0,1\\1}} = T_{\substack{1,1\\1}} T_{\substack{0,0\\1}} T_{\substack{0,1\\0}} T_{\substack{1,0\\0}}$ *ou*

(ii) $T_{\substack{0,0\\0}} + T_{\substack{1,1\\0}} = T_{\substack{0,1\\0}} + T_{\substack{1,0\\0}} = 1$ *ou*

(iii) $T_{\substack{0,1\\1}} T_{\substack{1,0\\0}} = T_{\substack{1,1\\0}} T_{\substack{0,0\\1}}$ *ou* $T_{\substack{1,0\\1}} T_{\substack{0,1\\0}} = T_{\substack{1,1\\0}} T_{\substack{0,0\\1}}$.



Le résultat

Théorème

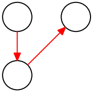
Soit $A = (\mathbb{Z}, E_\kappa, T)$ *un ACP. Alors* A *admet une chaîne de Markov invariante sur HZ ssi*

(*i*) $T_{\substack{0,0\\0}} T_{\substack{a,b\\0}} T_{\substack{a,0\\c}} T_{\substack{0,b\\c}} = T_{\substack{a,b\\c}} T_{\substack{0,0\\c}} T_{\substack{0,b\\0}} T_{\substack{a,0\\0}}$ *pour tous* a, b, c *et*

(*ii*) $D^\gamma U^\gamma = U^\gamma D^\gamma$.

Dans ce cas, la chaîne de Markov invariante sur HZ a pour noyaux (D^γ, U^γ).

Mais que sont D^γ et U^γ ? Nous allons voir comment on peut les calculer à partir de T.



Que sont D^γ et U^γ ?

Entrée : $\left(T_{\substack{a,b\\c}}\right)$ avec $a, b, c \in E_\kappa$.

1. $A_1 = \left(T_{\substack{i,i\\j}}\right)_{i,j\in E_\kappa}$: ν le vecteur propre à gauche avec $\sum_x \nu_x = 1$.
2. $A_2 = \left(\dfrac{T_{\substack{a,a\\0}}\nu_a}{T_{\substack{a,d\\0}}}\right)_{d,a\in E_\kappa}$: γ le vecteur propre à gauche.
3. Les deux noyaux de Markov (D^γ, U^γ) :

$$D^\gamma_{a,c} = \frac{\sum_k \frac{\gamma_k}{T_{\substack{a,k\\0}}} T_{\substack{a,k\\c}}}{\sum_k \frac{\gamma_k}{T_{\substack{a,k\\0}}}} \text{ et } U^\gamma_{c,b} = \frac{\frac{\gamma_b}{T_{\substack{0,b\\0}}} T_{\substack{0,b\\c}}}{\sum_k \frac{\gamma_k}{T_{\substack{0,k\\0}}} T_{\substack{0,k\\c}}}.$$

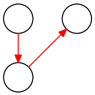
Rappel : le résultat

Théorème

Soit $A = (\mathbb{Z}, E_\kappa, T)$. Alors A admet une chaîne de Markov invariante sur HZ ssi

(i) $T_{\substack{0,0\\0}} T_{\substack{a,b\\0}} T_{\substack{a,0\\c}} T_{\substack{0,b\\c}} = T_{\substack{a,b\\c}} T_{\substack{0,0\\c}} T_{\substack{0,b\\0}} T_{\substack{a,0\\0}}$ *pour tous a, b, c et*

(ii) $D^\gamma U^\gamma = U^\gamma D^\gamma$.



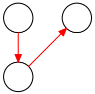
Amélioration du lemme de Toom & al. (1990)

Lemme

Soit $A = (\mathbb{Z}, E_\kappa, T)$. *La chaîne de Markov sur HZ de noyaux* (D, U) *est invariante par* A *ssi :*

(i) $T_{\substack{a,b\\c}} = \dfrac{D_{a,c}U_{c,b}}{(DU)_{a,b}}$ *pour tous* a, b, c *et*

(ii) $DU = UD$.



Un premier lemme

Lemme

Soit $A = (\mathbb{Z}, E_\kappa, T)$. *Alors, les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *il existe* D *et* U *matrices stochastiques tel que, pour tous* a, b, c,

$$T_{\substack{a,b\\c}} = \frac{D_{a,c}U_{c,b}}{(DU)_{a,b}},$$

(b) *pour tous* $a, b, c \in E_\kappa$, $T_{\substack{0,0\\0}} T_{\substack{a,b\\0}} T_{\substack{a,0\\c}} T_{\substack{0,b\\c}} = T_{\substack{a,b\\c}} T_{\substack{0,0\\c}} T_{\substack{0,b\\0}} T_{\substack{a,0\\0}}$,

(c) *pour tous* $a, a', b, b', c, c' \in E_\kappa$,

$$T_{\substack{a',b'\\c'}} T_{\substack{a,b\\c'}} T_{\substack{a,b'\\c}} T_{\substack{a',b\\c}} = T_{\substack{a,b\\c}} T_{\substack{a',b'\\c}} T_{\substack{a',b\\c'}} T_{\substack{a,b'\\c'}}.$$

Un premier lemme

Lemme

Soit $A = (\mathbb{Z}, E_\kappa, T)$. *Alors, les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *il existe* D *et* U *matrices stochastiques tel que, pour tous* a, b, c,

$$T_{\substack{a,b\\c}} = \frac{D_{a,c}U_{c,b}}{(DU)_{a,b}},$$

(b) *pour tous* $a, b, c \in E_\kappa$, $\quad T_{\substack{a,b\\c}} = \dfrac{T_{\substack{0,0\\0}} T_{\substack{a,0\\c}} T_{\substack{0,b\\c}} T_{\substack{a,b\\0}}}{T_{\substack{a,0\\0}} T_{\substack{0,b\\0}} T_{\substack{0,0\\c}}}$,

(c) *pour tous* $a, a', b, b', c, c' \in E_\kappa$,

$$T_{\substack{a',b'\\c'}} T_{\substack{a,b\\c'}} T_{\substack{a,b'\\c}} T_{\substack{a',b\\c}} = T_{\substack{a,b\\c}} T_{\substack{a',b'\\c}} T_{\substack{a',b\\c'}} T_{\substack{a,b'\\c'}}.$$

Un deuxième lemme

Lemme

Soit $A = (\mathbb{Z}, E_\kappa, T)$.

Si $T_{\substack{a,b\\c}} = \dfrac{D_{a,c}U_{c,b}}{(DU)_{a,b}}$, *alors*

$$D^\eta_{a,c} = \frac{\sum_k \dfrac{\eta_k}{T_{\substack{a,k\\0}}} T_{\substack{a,k\\c}}}{\sum_k \dfrac{\eta_k}{T_{\substack{a,k\\0}}}} \text{ et } U^\eta_{c,b} = \frac{\dfrac{\eta_b}{T_{\substack{0,b\\0}}} T_{\substack{0,b\\c}}}{\sum_k \dfrac{\eta_k}{T_{\substack{0,k\\0}}} T_{\substack{0,k\\c}}}$$

où η *est une mesure de probabilité (à taux strictement positifs) sur* E_κ.

- $\eta_b = U_{0,b}$.

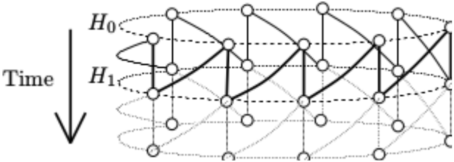
Un troisième lemme

$+\ DU = UD$

Lemme

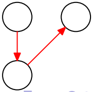
Soit $A = (\mathbb{Z}, E_\kappa, T)$ *vérifiant les conditions rouges et si, en plus, pour tout* $a \in E_\kappa$, $(D^\eta U^\eta)_{a,a} = (U^\eta D^\eta)_{a,a}$, *alors* $\eta = \gamma$.

Extension 1 : le zigzag torique

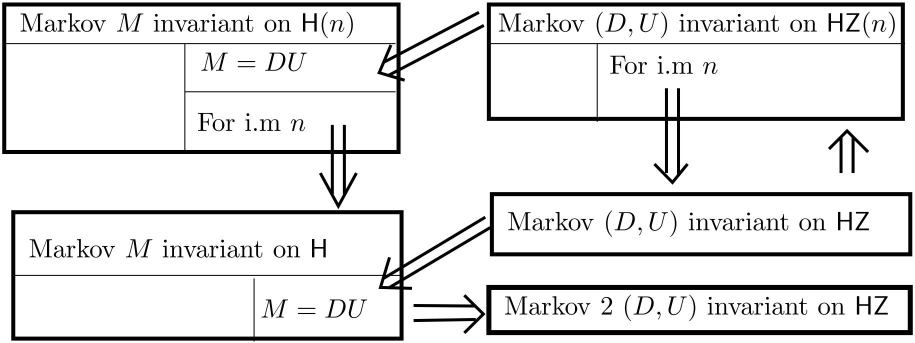
- 

- Chaîne de Markov cyclique [Marie Albenque].
- Les conditions $T_{\substack{0,0\\0}} T_{\substack{a,b\\0}} T_{\substack{a,0\\c}} T_{\substack{0,b\\c}} = T_{\substack{a,b\\c}} T_{\substack{0,0\\c}} T_{\substack{0,b\\0}} T_{\substack{a,0\\0}}$ ne changent pas.
- La condition $(D^\gamma U^\gamma) = (U^\gamma D^\gamma)$ devient, pour tout $1 \leq k \leq \kappa + 1$,

$$\text{Diagonale}\left((D^\gamma U^\gamma)^k\right) = \text{Diagonale}\left((U^\gamma D^\gamma)^k\right).$$



Classification des automates cellulaires à loi Markovienne



Merci