COMMENT DESSINER UN ARBRE

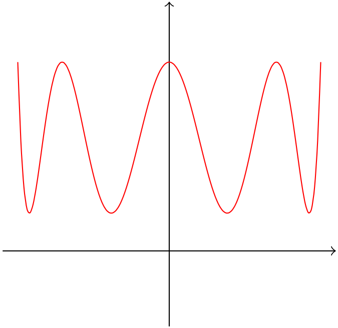
Philippe Biane

ALEA

Luminy, 20/03/2014

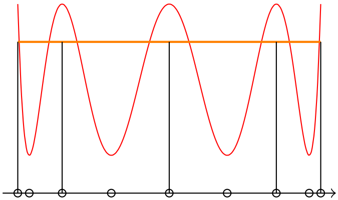
POLYNÔMES de TCHEBYCHEFF

$$T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$$



$$T_8(x) = 128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 + 1$$

$$\frac{T_8(x)+1}{2}$$



Les valeurs critiques (des max et min locaux) sont en 0 et 1.

Un polynôme $P(z)$ qui admet au plus deux valeurs critiques 0 et 1

$$P'(z) = 0 \to P(z) \in \{0, 1\}$$

est un *polynôme de Shabat*

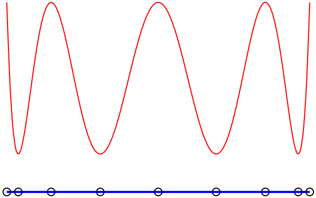
Théorème: si P est un polynôme de Shabat, alors $P^{-1}([0, 1])$ est un arbre plongé dans $\mathbf{C}$.

Preuve:

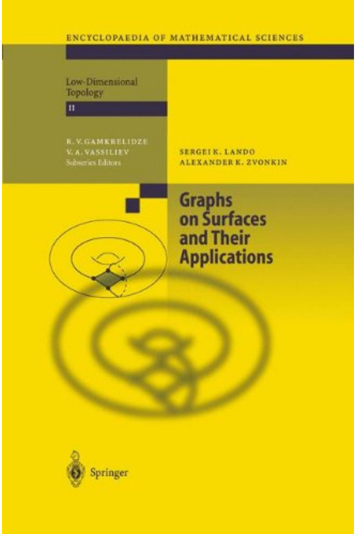
1. On montre que le graphe $P^{-1}([0, 1])$ n'a pas de cycle (argument topologique).

2. On montre que le nombre de sommets vaut le nombre d'arêtes plus un

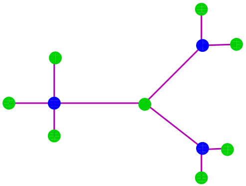
Exemple



En fait tout arbre peut se représenter ainsi


ENCYCLOPAEDIA OF MATHEMATICAL SCIENCES
Low-Dimensional Topology
II
R. V. GAMKRELIDZE
V. A. VASSILIEV
Subseries Editors
SERGEI K. LANDO
ALEXANDER K. ZVONKIN
Graphs on Surfaces and Their Applications
Springer

Un exemple



Le polynôme doit avoir:

une racine d'ordre 4 et deux d'ordre 3;

$$P(z) = \lambda z^4 (z-a)^3 (z-b)^3$$

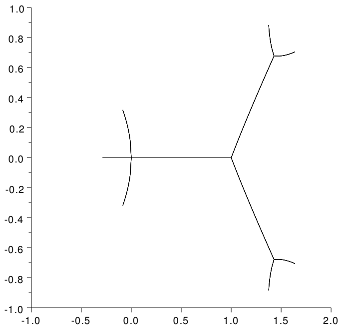
$P(z) - 1$ doit avoir une racine triple (en c) donc

$$P'(z) = 10\lambda z^3 (z-a)^2 (z-b)^2 (z-c)^2$$

On trouve

$$P(z) = z^4 \left(\frac{14z^2 - 40z + 35}{9} \right)^3$$

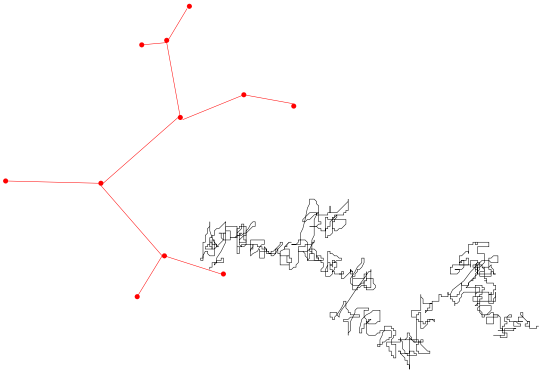
Un exemple



$$P(z) = z^4 \left(\frac{14z^2 - 40z + 35}{9} \right)^3$$

Interprétation probabiliste

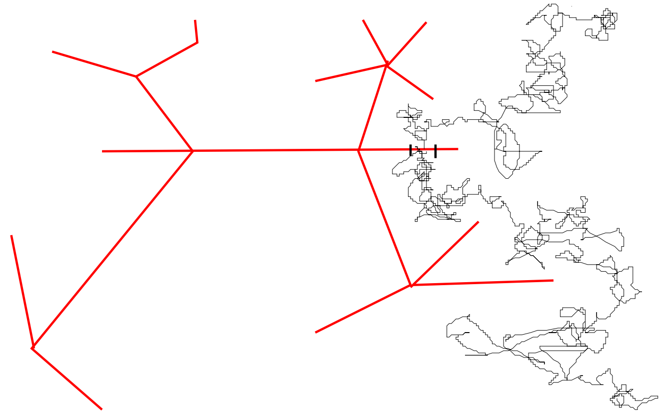
Un mouvement Brownien complexe part de l'infini et arrive sur l'arbre.



Je veux un arbre tel que :

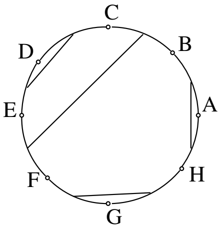
chaque arête soit touchée avec probabilité $1/n$.

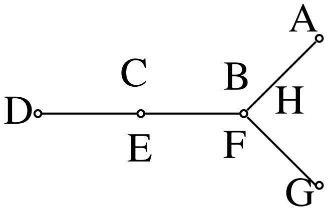
pour chaque intervalle sur une arête, la probabilité d'arriver d'un côté ou de l'autre soit identique.



Comment obtenir un tel arbre?

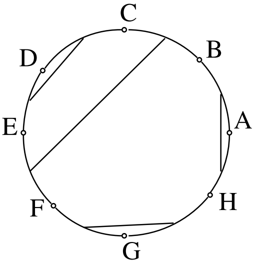
Un arbre s'obtient à partir d'une partition non-croisée





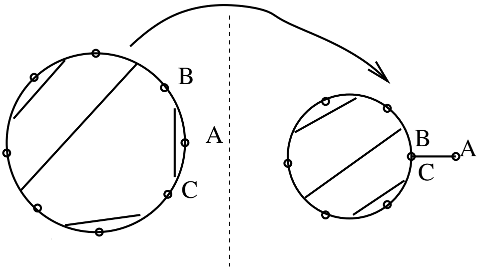
Remarquons qu'un mouvement Brownien partant de l'infini arrive dans un des intervalles du cercle avec probabilité $1/2n$.

Cette probabilité se conserve par transformation conforme



On peut coller deux intervalles adjacents selon leur longueur d'arc

$$\phi_\theta(z) = \left(z^2 + 1 + 2\sin^2(\theta/2)z + (z+1)\sqrt{z^2+1-2z\cos\theta}\right)/(2z)$$



la transformation envoie l'extérieur du disque sur l'extérieur de (disque ∪ intervalle)

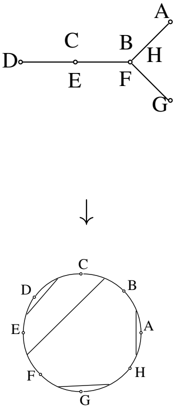
On peut continuer à coller les arcs de cercle deux-à-deux par "soudure conforme" (on utilise l'équation différentielle de Löwner).

On obtient Φ transformation conforme de l'extérieur du disque sur le complémentaire d'un arbre.

$$\Phi(z) \sim z \qquad |z| >> 1$$

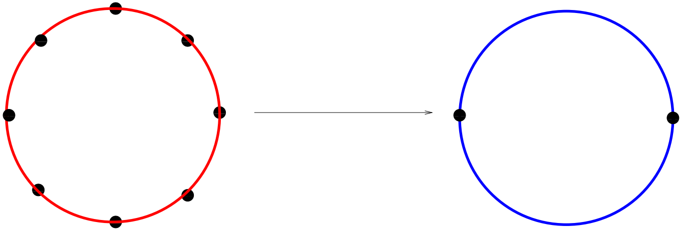
$$\Psi = \Phi^{-1}$$

envoie l'extérieur de l'arbre sur l'extérieur du cercle



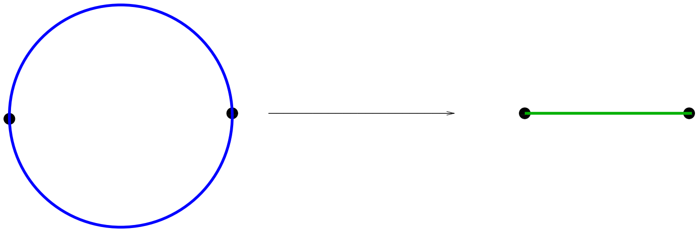
$$z \to z^n$$

envoie l'extérieur du disque sur lui-même



$$(z \to z + 1/z + 2)/4$$

envoie l'extérieur du disque sur l'extérieur de $[0, 1]$.



$$P(z) = (\Psi(z)^n + \Psi(z)^{-n} + 2)/4$$

envoie l'extérieur de l'arbre sur l'extérieur de $[0,1]$ de plus P est continue sur l'arbre, donc P est entière

Comme

$$P(z) \sim z^n \qquad |z| >> 1$$

c'est un polynôme de degré n.

La formule s'inverse en

$$\Psi(z) = \left(\frac{2P(z) - 1 + 2\sqrt{P(z)^2 - P(z)}}{4} \right)^{1/n}$$