Poids sur les arbres binaires de recherche

Anis Amri   Rafik Aguech

Faculté des Sciences de Monastir

Journées ALEA 2014.

20 mars 2014

Plan de la présentation

Plan de la présentation

On considère un arbre binaire de recherche $\mathcal{T}_n$ construit à partir de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ iid de loi $\mathcal{U}[0,\ 1]$. On a par conséquent $(n+1)$ feuilles.

Définition

$\forall k \in \{1, \ldots, n+1\}$, on appelle poids du $k^{ième}$ parcours, noté par $W_k(n)$ dans un ABR de taille n, la somme de toutes étiquettes des noeuds se trouvant sur ce parcours.
En particulier,
- Si $k = 1$, $W_1(n)$ est le poids du parcours tout à gauche, reliant la racine au minimum de $x_1, \ldots, x_n$.
- Si $k = n+1$, $W_{n+1}(n)$ est le poids du parcours tout à droite, reliant la racine au maximum de $x_1, \ldots, x_n$.

Le poids total noté T_n est $T_n := \sum_{k=1}^{n+1} W_k(n)$.

On considère un arbre binaire de recherche $\mathcal{T}_n$ construit à partir de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ iid de loi $\mathcal{U}[0,\ 1]$. On a par conséquent $(n+1)$ feuilles.

Définition

$\forall k \in \{1, \ldots, n+1\}$, on appelle poids du $k^{ième}$ parcours, noté par $W_k(n)$ dans un ABR de taille n, la somme de toutes étiquettes des noeuds se trouvant sur ce parcours.

En particulier,

- Si $k = 1$, $W_1(n)$ est le poids du parcours tout à gauche, reliant la racine au minimum de $x_1, \ldots, x_n$.
- Si $k = n+1$, $W_{n+1}(n)$ est le poids du parcours tout à droite, reliant la racine au maximum de $x_1, \ldots, x_n$.

Le poids total noté T_n est $T_n := \sum_{k=1}^{n+1} W_k(n)$.

On considère un arbre binaire de recherche $\mathcal{T}_n$ construit à partir de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ iid de loi $\mathcal{U}[0,\ 1]$. On a par conséquent $(n+1)$ feuilles.

Définition

$\forall k \in \{1, \ldots, n+1\}$, on appelle poids du $k^{ième}$ parcours, noté par $W_k(n)$ dans un ABR de taille n, la somme de toutes étiquettes des noeuds se trouvant sur ce parcours.
En particulier,
- Si $k = 1$, $W_1(n)$ est le poids du parcours tout à gauche, reliant la racine au minimum de $x_1, \ldots, x_n$.
- Si $k = n+1$, $W_{n+1}(n)$ est le poids du parcours tout à droite, reliant la racine au maximum de $x_1, \ldots, x_n$.

Le poids total noté T_n est $T_n := \sum_{k=1}^{n+1} W_k(n)$.

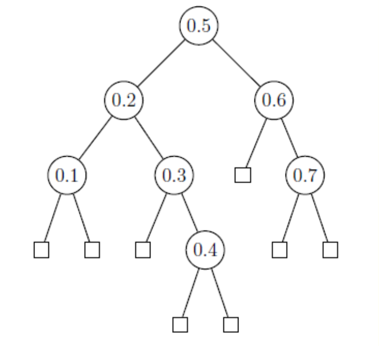

FIG.: Arbre binaire de recherche construit à partir $\{0.5,\ 0.6,\ 0.2,\ 0.1,\ 0.7,\ 0.3,\ 0.2\}$.

$$T_7 = 2\times(0.5+0.2+0.1)+(0.5+0.2+0.3)+2\times(0.5+0.2+0.3+0.4)+(0.5+0.6)+2\times(0.5+0.6+0.7)$$

.

$$W_1(7) = 0.5+0.2+0.1,$$

$$W_8(7) = 0.5+0.6+0.7.$$

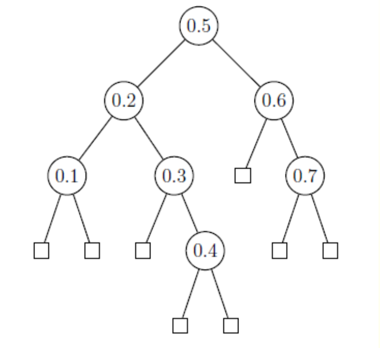

FIG.: Arbre binaire de recherche construit à partir $\{0.5,\ 0.6,\ 0.2,\ 0.1,\ 0.7,\ 0.3,\ 0.2\}$.

$$T_7 = 2\times(0.5+0.2+0.1)+(0.5+0.2+0.3)+2\times(0.5+0.2+0.3+0.4)+(0.5+0.6)+2\times(0.5+0.6+0.7)$$

.

$$W_1(7) = 0.5 + 0.2 + 0.1,$$

$$W_8(7) = 0.5 + 0.6 + 0.7.$$

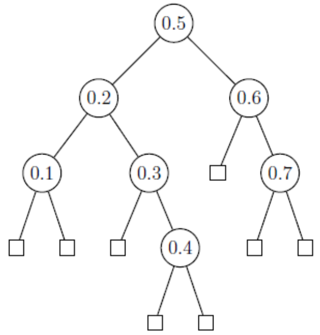

FIG.: Arbre binaire de recherche construit à partir $\{0.5,\ 0.6,\ 0.2,\ 0.1,\ 0.7,\ 0.3,\ 0.2\}$.

$$T_7 = 2\times(0.5+0.2+0.1)+(0.5+0.2+0.3)+2\times(0.5+0.2+0.3+0.4)+(0.5+0.6)+2\times(0.5+0.6+0.7)$$

.

$$W_1(7) = 0.5 + 0.2 + 0.1,$$

$$W_8(7) = 0.5 + 0.6 + 0.7.$$

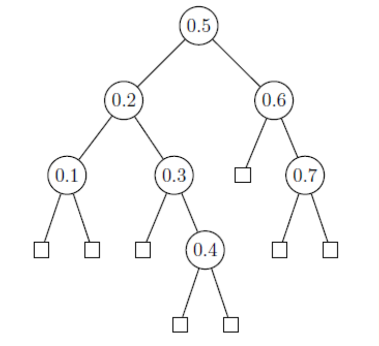

FIG.: Arbre binaire de recherche construit à partir $\{0.5,\ 0.6,\ 0.2,\ 0.1,\ 0.7,\ 0.3,\ 0.2\}$.

$$T_7 = 2\times(0.5+0.2+0.1)+(0.5+0.2+0.3)+2\times(0.5+0.2+0.3+0.4)+(0.5+0.6)+2\times(0.5+0.6+0.7)$$

.

$$W_1(7) = 0.5 + 0.2 + 0.1,$$

$$W_8(7) = 0.5 + 0.6 + 0.7.$$

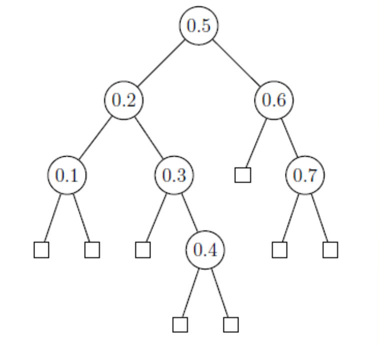

FIG.: Arbre binaire de recherche construit à partir $\{0.5,\ 0.6,\ 0.2,\ 0.1,\ 0.7,\ 0.3,\ 0.2\}$.

$$T_7 = 2\times(0.5+0.2+0.1)+(0.5+0.2+0.3)+2\times(0.5+0.2+0.3+0.4)+(0.5+0.6)+2\times(0.5+0.6+0.7)$$

.

$$W_1(7) = 0.5 + 0.2 + 0.1,$$

$$W_8(7) = 0.5 + 0.6 + 0.7.$$

Soit

$$Z_n := \#\Big\{i,\ i \in \{1,\ldots,n\},\ x_i \leq x_1\Big\}$$

le rang de x_1 parmi $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$.

Lemme

$$\frac{Z_n}{n} \xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{ps} x_1.$$

On sait que les noeuds du sous-arbre gauche (resp. droite) ont des étiquettes inférieures (resp. supéreures) à x_1.

$\Longrightarrow$ Ceci prouve que, les étiquettes qui sont insérés dans le sous-arbre gauche suivent la loi $\mathcal{U}[0,\ x_1]$ et les autres étiquettes qui vont être insérées dans le sous-arbre droit suivent la loi $\mathcal{U}[x_1,\ 1]$.

Ainsi

$$\mathcal{U}[0,\ x_1] \stackrel{\mathcal{L}}{=} x_1\mathcal{U}[0,\ 1],\ \mathcal{U}[x_1,\ 1] \stackrel{\mathcal{L}}{=} (1-x_1)\mathcal{U}[0,\ 1] + x_1$$

Soit

$$Z_n := \#\Big\{i,\ i \in \{1, \ldots, n\},\ x_i \leq x_1\Big\}$$

le rang de x_1 parmi $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$.

Lemme

$$\frac{Z_n}{n} \xrightarrow[n \longrightarrow \infty]{ps} x_1.$$

On sait que les noeuds du sous-arbre gauche (resp. droite) ont des étiquettes inférieures (resp. supéreures) à x_1.

$\Longrightarrow$ Ceci prouve que, les étiquettes qui sont insérés dans le sous-arbre gauche suivent la loi $\mathcal{U}[0,\ x_1]$ et les autres étiquettes qui vont être insérées dans le sous-arbre droit suivent la loi $\mathcal{U}[x_1,\ 1]$.

Ainsi

$$\mathcal{U}[0,\ x_1] \stackrel{\mathcal{L}}{=} x_1\mathcal{U}[0,\ 1],\ \mathcal{U}[x_1,\ 1] \stackrel{\mathcal{L}}{=} (1-x_1)\mathcal{U}[0,\ 1] + x_1$$

Soit

$$Z_n := \#\Big\{i,\ i \in \{1,\ldots,n\},\ x_i \leq x_1\Big\}$$

le rang de x_1 parmi $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$.

Lemme

$$\frac{Z_n}{n} \xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{ps} x_1.$$

On sait que les noeuds du sous-arbre gauche (resp. droite) ont des étiquettes inférieures (resp. supéreures) à x_1.

$\Longrightarrow$ Ceci prouve que, les étiquettes qui sont insérés dans le sous-arbre gauche suivent la loi $\mathcal{U}[0,\ x_1]$ et les autres étiquettes qui vont être insérées dans le sous-arbre droit suivent la loi $\mathcal{U}[x_1,\ 1]$.

Ainsi

$$\mathcal{U}[0,\ x_1] \stackrel{\mathcal{L}}{=} x_1\mathcal{U}[0,\ 1],\ \mathcal{U}[x_1,\ 1] \stackrel{\mathcal{L}}{=} (1-x_1)\mathcal{U}[0,\ 1] + x_1$$

Soit

$$Z_n := \#\Big\{i,\ i \in \{1,\dots,n\},\ x_i \leq x_1\Big\}$$

le rang de x_1 parmi $x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n$.

Lemme

$$\frac{Z_n}{n} \xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{ps} x_1.$$

On sait que les noeuds du sous-arbre gauche (resp. droite) ont des étiquettes inférieures (resp. supéreures) à x_1.

$\Longrightarrow$ Ceci prouve que, les étiquettes qui sont insérés dans le sous-arbre gauche suivent la loi $\mathcal{U}[0,\ x_1]$ et les autres étiquettes qui vont être insérées dans le sous-arbre droit suivent la loi $\mathcal{U}[x_1,\ 1]$.

Ainsi

$$\mathcal{U}[0,\ x_1] \stackrel{\mathcal{L}}{=} x_1\mathcal{U}[0,\ 1],\ \mathcal{U}[x_1,\ 1] \stackrel{\mathcal{L}}{=} (1-x_1)\mathcal{U}[0,\ 1] + x_1$$

Soit

$$Z_n := \#\Big\{i,\ i \in \{1, ..., n\},\ x_i \leq x_1\Big\}$$

le rang de x_1 parmi $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$.

Lemme

$$\frac{Z_n}{n} \xrightarrow[n \longrightarrow \infty]{ps} x_1.$$

On sait que les noeuds du sous-arbre gauche (resp. droite) ont des étiquettes inférieures (resp. supéreures) à x_1.

$\Longrightarrow$ Ceci prouve que, les étiquettes qui sont insérés dans le sous-arbre gauche suivent la loi $\mathcal{U}[0,\ x_1]$ et les autres étiquettes qui vont être insérées dans le sous-arbre droit suivent la loi $\mathcal{U}[x_1,\ 1]$.

Ainsi

$$\mathcal{U}[0,\ x_1] \overset{\mathcal{L}}{=} x_1\mathcal{U}[0,\ 1],\ \mathcal{U}[x_1,\ 1] \overset{\mathcal{L}}{=} (1 - x_1)\mathcal{U}[0,\ 1] + x_1$$

Plan de la présentation

- Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de vecteurs aléatoires centrées dans L^2,

$$X_n \stackrel{\mathcal{D}}{=} \sum_{r=1}^{K} A_r^{(n)} X_{I_r^{(n)}} + b^{(n)}, \quad n \geq n_0 \tag{1}$$

où $(A_1^{(n)}, \ \ldots, \ A_K^{(n)}, \ b^{(n)}, \ I^{(n)})$ et $(X_n^{(1)})_{n\geq 0}, \ \ldots, \ (X_n^{(K)})_{n\geq 0}$ sont indépendantes, et $\forall r = 1, \ldots, K$ et $\forall i \geq 0$, $X_i^{(r)} \stackrel{\mathcal{L}}{=} X_i$ et $I^{(n)} = (I_1^{(n)}, \ \ldots, \ I_K^{(n)})$ avec $I_i^n \sim \mathcal{U}\{0, \ \ldots, \ n-1\}$.

- Soit

$$X \stackrel{\mathcal{D}}{=} \sum_{r=1}^{K} A_r^* X^{(r)} + b^*, \tag{2}$$

où $(A_1^*, \ldots, A_K^*, b^*), \ X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots, X^{(K)}$ sont indépendantes et $X^{(r)} \stackrel{\mathcal{L}}{=} X, \ \forall r = 1, \ldots, K.$

- Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de vecteurs aléatoires centrées dans L^2,

$$X_n \stackrel{\mathcal{D}}{=} \sum_{r=1}^{K} A_r^{(n)} X_{I_r^{(n)}} + b^{(n)}, \quad n \geq n_0 \tag{1}$$

où $(A_1^{(n)},\ \ldots,\ A_K^{(n)},\ b^{(n)},\ I^{(n)})$ et $(X_n^{(1)})_{n\geq 0},\ \ldots,\ (X_n^{(K)})_{n\geq 0}$ sont indépendantes, et $\forall r = 1, \ldots, K$ et $\forall i \geq 0$, $X_i^{(r)} \stackrel{\mathcal{L}}{=} X_i$ et $I^{(n)} = (I_1^{(n)},\ \ldots,\ I_K^{(n)})$ avec $I_i^n \sim \mathcal{U}\{0,\ \ldots,\ n-1\}$.

- Soit

$$X \stackrel{\mathcal{D}}{=} \sum_{r=1}^{K} A_r^* X^{(r)} + b^*, \tag{2}$$

où $(A_1^*, \ldots, A_K^*, b^*),\ X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots, X^{(K)}$ sont indépendantes et $X^{(r)} \stackrel{\mathcal{L}}{=} X,\ \forall r = 1, \ldots, K$.

Théorème (R. Neininger, L. Rüschendorf 2004)

Soit X_n donnée par (1). On suppose que,

$$(A_1^{(n)},\ \dots,\ A_K^{(n)},\ b^n) \xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{L^2} (A_1^*,\ \dots,\ A_K^*,\ b^*), \tag{3}$$

$$\mathbb{E}\sum_{r=1}^{K} ||(A_r^*)^t A_r^*||_{op} < 1,\ et \tag{4}$$

$$\mathbb{E}\left[1_{\{I_r^{(n)}\leq l\}\cup\{I_n^{(n)}=n\}}\left|\left|A_r^{(n)}\right|\right|_{op}^2\right] \xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{} 0, \tag{5}$$

pour tout $l \in \mathbb{N}$ et $r = 1,\ \dots,\ K$.
Alors

$$X_n \xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{\mathcal{L}} X$$

.

Plan de la présentation

Résultats connus

On appelle longueur cheminement externe dans un ABR de taille n, la somme des profondeurs des feuilles, noté E_n.

$$\begin{cases} E_n \stackrel{\mathcal{L}}{=} E_{Z_n - 1} + E'_{n - Z_n} + n + 1, & n \geq 1 \\ E_0 = 0, & \end{cases}$$

où, pour tout $j \geq 0$, $E_j \stackrel{\mathcal{L}}{=} E'_j$, et

$$Z_n;\ E_0,\ E_1,\ \ldots,\ E_{n-1};\ E'_0,\ E'_1,\ \ldots,\ E'_{n-1}$$

sont indépendantes

Résultats connus

Théorème (Rösler 1991)

Soit (E_n) la longueur cheminement externe dans un ABR de taille n, on a,

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}[E_n] & = & 2(n+1)(h_{n+1}-1), \\ \mathbb{V}ar[E_n] & = & \sigma^2 n^2 - 2n\ln n + \mathcal{O}(n), \end{array}$$

où $\sigma^2 := 7 - \frac{2\pi^2}{3} > 0$,

$$\frac{E_n - \mathbb{E}[E_n]}{n+1} \xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{\mathcal{L}} Z$$

où $\mathcal{L}(Z)$ est l'unique point fixe

$$\begin{array}{rcl} T: \quad \mathcal{M}_2(0) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(0) \\ \mu & \longmapsto & \mathcal{L}\Big(UZ + (1-U)Z' + g(U)\Big). \end{array}$$

avec $g(U) := 2U\ln U + (1-U)\ln 1 - U + 1$ et
$U,\ Z,\ Z'$ sont indépendantes, $Z \stackrel{\mathcal{L}}{=} Z'$ et U est $\mathcal{U}[0,\ 1]$.

Résultats obtenus : Poids total

Proposition

$$\begin{cases} T_n \overset{\mathcal{L}}{=} (n+1)x_1 + x_1 T_{Z_n - 1} + (1-x_1)T'_{n-Z_n} + x_1 E'_{n-Z_n}, & n \geq 1 \\ T_0 = 0. \end{cases}$$

où Z_n est uniforme sur $\{1, \ldots, n\}$; x_1 l'étiquette de la racine, $T_k \overset{\mathcal{L}}{=} T'_k$, pour tout $k \geq 0$ et

$$Z_n;\ T_0,\ T_1,\ \ldots,\ T_{n-1};\ (T'_0,\ E'_0),\ (T'_1,\ E'_1),\ \ldots,\ (T'_{n-1},\ E'_{n-1}),$$

sont indépendantes, et $E'_k \overset{\mathcal{L}}{=} E_k$.

$$\begin{pmatrix} T_n \\ E_n \end{pmatrix} \overset{\mathcal{L}}{=} \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} T_{Z_n-1} \\ E_{Z_n-1} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1-x_1 & x_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} T_{n-Z_n} \\ E_{n-Z_n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (n+1)x_1 \\ n+1 \end{pmatrix}$$

On normalise

$$X_n = \left(\frac{T_n - \mathbb{E}[T_n]}{n+1}, \; \frac{E_n - \mathbb{E}[E_n]}{n+1} \right)^t,$$

Vérifie la récursion

$$X_n \overset{\mathcal{L}}{=} A_1^{(n)} X_{Z_n-1} + A_2^{(n)} X'_{n-Z_n} + b^{(n)},$$

avec X'_n et X_n indépendantes et pour tout $n \geq 0$, $X'_n \overset{\mathcal{D}}{=} X_n$,
où

$$A_1^{(n)} = \begin{bmatrix} x_1 \frac{Z_n}{n+1} & 0 \\ 0 & \frac{Z_n}{n+1} \end{bmatrix}, \; A_2^{(n)} = \begin{bmatrix} (1-x_1)(1-\frac{Z_n}{n+1}) & x_1(1-\frac{Z_n}{n+1}) \\ 0 & 1-\frac{Z_n}{n+1} \end{bmatrix},$$

$$b^{(n)} = \begin{pmatrix} x_1 \frac{Z_n}{n+1} \ln\left(\frac{Z_n}{n+1}\right) + (1+x_1)\left(1-\frac{Z_n}{n+1}\right) \ln\left(1-\frac{Z_n}{n+1}\right) + \frac{Z_n}{n+1}\right)\gamma + o(1) \\ 1 + 2\frac{Z_n}{n+1} \ln\left(\frac{Z_n}{n+1}\right) + 2\left(1-\frac{Z_n}{n+1}\right) \ln\left(1-\frac{Z_n}{n+1}\right) + o(1) \end{pmatrix}$$

,

$$\begin{pmatrix} T_n \\ E_n \end{pmatrix} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} T_{Z_n-1} \\ E_{Z_n-1} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1-x_1 & x_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} T_{n-Z_n} \\ E_{n-Z_n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (n+1)x_1 \\ n+1 \end{pmatrix}$$

On normalise

$$X_n = \left(\frac{T_n - \mathbb{E}[T_n]}{n+1}, \; \frac{E_n - \mathbb{E}[E_n]}{n+1} \right)^t,$$

Vérifie la récursion

$$X_n \stackrel{\mathcal{L}}{=} A_1^{(n)} X_{Z_n-1} + A_2^{(n)} X'_{n-Z_n} + b^{(n)},$$

avec X'_n et X_n indépendantes et pour tout $n \geq 0$, $X'_n \stackrel{\mathcal{D}}{=} X_n$,
où

$$A_1^{(n)} = \begin{bmatrix} x_1 \frac{Z_n}{n+1} & 0 \\ 0 & \frac{Z_n}{n+1} \end{bmatrix}, \; A_2^{(n)} = \begin{bmatrix} (1-x_1)(1-\frac{Z_n}{n+1}) & x_1(1-\frac{Z_n}{n+1}) \\ 0 & 1-\frac{Z_n}{n+1} \end{bmatrix},$$

$$b^{(n)} = \begin{pmatrix} x_1 \frac{Z_n}{n+1} \ln\left(\frac{Z_n}{n+1}\right) + (1+x_1)\left(1-\frac{Z_n}{n+1}\right)\ln\left(1-\frac{Z_n}{n+1}\right) + \frac{Z_n}{n+1}\Big)\gamma + o(1) \\ 1 + 2\frac{Z_n}{n+1}\ln\left(\frac{Z_n}{n+1}\right) + 2\left(1-\frac{Z_n}{n+1}\right)\ln\left(1-\frac{Z_n}{n+1}\right) + o(1) \end{pmatrix}$$

,

$$\begin{pmatrix} T_n \\ E_n \end{pmatrix} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} T_{Z_n-1} \\ E_{Z_n-1} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1-x_1 & x_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} T_{n-Z_n} \\ E_{n-Z_n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (n+1)x_1 \\ n+1 \end{pmatrix}$$

On normalise

$$X_n = \left(\frac{T_n - \mathbb{E}[T_n]}{n+1}, \frac{E_n - \mathbb{E}[E_n]}{n+1} \right)^t,$$

Vérifie la récursion

$$X_n \stackrel{\mathcal{L}}{=} A_1^{(n)} X_{Z_n-1} + A_2^{(n)} X'_{n-Z_n} + b^{(n)},$$

avec X'_n et X_n indépendantes et pour tout $n \geq 0$, $X'_n \stackrel{\mathcal{D}}{=} X_n$,
où

$$A_1^{(n)} = \begin{bmatrix} x_1 \frac{Z_n}{n+1} & 0 \\ 0 & \frac{Z_n}{n+1} \end{bmatrix}, \quad A_2^{(n)} = \begin{bmatrix} (1-x_1)(1-\frac{Z_n}{n+1}) & x_1(1-\frac{Z_n}{n+1}) \\ 0 & 1-\frac{Z_n}{n+1} \end{bmatrix},$$

$$b^{(n)} = \begin{pmatrix} x_1 \frac{Z_n}{n+1} \ln\left(\frac{Z_n}{n+1}\right) + (1+x_1)\left(1-\frac{Z_n}{n+1}\right) \ln\left(1-\frac{Z_n}{n+1}\right) + \frac{Z_n}{n+1}\right)\gamma + o(1) \\ 1 + 2\frac{Z_n}{n+1} \ln\left(\frac{Z_n}{n+1}\right) + 2\left(1-\frac{Z_n}{n+1}\right) \ln\left(1-\frac{Z_n}{n+1}\right) + o(1) \end{pmatrix}$$

,

$$\begin{pmatrix} T_n \\ E_n \end{pmatrix} \overset{\mathcal{L}}{=} \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} T_{Z_n-1} \\ E_{Z_n-1} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1-x_1 & x_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} T_{n-Z_n} \\ E_{n-Z_n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (n+1)x_1 \\ n+1 \end{pmatrix}$$

On normalise

$$X_n = \left(\frac{T_n - \mathbb{E}[T_n]}{n+1}, \ \frac{E_n - \mathbb{E}[E_n]}{n+1} \right)^t,$$

Vérifie la récursion

$$X_n \overset{\mathcal{L}}{=} A_1^{(n)} X_{Z_n-1} + A_2^{(n)} X'_{n-Z_n} + b^{(n)},$$

avec X'_n et X_n indépendantes et pour tout $n \geq 0$, $X'_n \overset{\mathcal{D}}{=} X_n$,
où

$$A_1^{(n)} = \begin{bmatrix} x_1 \frac{Z_n}{n+1} & 0 \\ 0 & \frac{Z_n}{n+1} \end{bmatrix}, \ A_2^{(n)} = \begin{bmatrix} (1-x_1)(1-\frac{Z_n}{n+1}) & x_1(1-\frac{Z_n}{n+1}) \\ 0 & 1-\frac{Z_n}{n+1} \end{bmatrix},$$

$$b^{(n)} = \begin{pmatrix} x_1 \frac{Z_n}{n+1} \ln\left(\frac{Z_n}{n+1}\right) + (1+x_1)\left(1-\frac{Z_n}{n+1}\right) \ln\left(1-\frac{Z_n}{n+1}\right) + \frac{Z_n}{n+1}\right)\gamma + o(1) \\ 1 + 2\frac{Z_n}{n+1} \ln\left(\frac{Z_n}{n+1}\right) + 2\left(1-\frac{Z_n}{n+1}\right) \ln\left(1-\frac{Z_n}{n+1}\right) + o(1) \end{pmatrix}$$

,

$$\begin{pmatrix} T_n \\ E_n \end{pmatrix} \overset{\mathcal{L}}{=} \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} T_{Z_n-1} \\ E_{Z_n-1} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1-x_1 & x_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} T_{n-Z_n} \\ E_{n-Z_n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (n+1)x_1 \\ n+1 \end{pmatrix}$$

On normalise

$$X_n = \left(\frac{T_n - \mathbb{E}[T_n]}{n+1}, \ \frac{E_n - \mathbb{E}[E_n]}{n+1} \right)^t,$$

Vérifie la récursion

$$X_n \overset{\mathcal{L}}{=} A_1^{(n)} X_{Z_n-1} + A_2^{(n)} X'_{n-Z_n} + b^{(n)},$$

avec X'_n et X_n indépendantes et pour tout $n \geq 0$, $X'_n \overset{\mathcal{D}}{=} X_n$,
où

$$A_1^{(n)} = \begin{bmatrix} x_1 \frac{Z_n}{n+1} & 0 \\ 0 & \frac{Z_n}{n+1} \end{bmatrix}, \ A_2^{(n)} = \begin{bmatrix} (1-x_1)(1-\frac{Z_n}{n+1}) & x_1(1-\frac{Z_n}{n+1}) \\ 0 & 1-\frac{Z_n}{n+1} \end{bmatrix},$$

$$b^{(n)} = \begin{pmatrix} x_1 \frac{Z_n}{n+1} \ln\left(\frac{Z_n}{n+1}\right) + (1+x_1)\left(1-\frac{Z_n}{n+1}\right) \ln\left(1-\frac{Z_n}{n+1}\right) + \frac{Z_n}{n+1}\Big)\gamma + o(1) \\ 1 + 2\frac{Z_n}{n+1} \ln\left(\frac{Z_n}{n+1}\right) + 2\left(1-\frac{Z_n}{n+1}\right) \ln\left(1-\frac{Z_n}{n+1}\right) + o(1) \end{pmatrix}$$

,

$$\begin{pmatrix} T_n \\ E_n \end{pmatrix} \overset{\mathcal{L}}{=} \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} T_{Z_n-1} \\ E_{Z_n-1} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1-x_1 & x_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} T_{n-Z_n} \\ E_{n-Z_n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (n+1)x_1 \\ n+1 \end{pmatrix}$$

On normalise

$$X_n = \left(\frac{T_n - \mathbb{E}[T_n]}{n+1}, \frac{E_n - \mathbb{E}[E_n]}{n+1} \right)^t,$$

Vérifie la récursion

$$X_n \overset{\mathcal{L}}{=} A_1^{(n)} X_{Z_n-1} + A_2^{(n)} X'_{n-Z_n} + b^{(n)},$$

avec X'_n et X_n indépendantes et pour tout $n \geq 0$, $X'_n \overset{\mathcal{D}}{=} X_n$,
où

$$A_1^{(n)} = \begin{bmatrix} x_1 \frac{Z_n}{n+1} & 0 \\ 0 & \frac{Z_n}{n+1} \end{bmatrix}, \; A_2^{(n)} = \begin{bmatrix} (1-x_1)(1-\frac{Z_n}{n+1}) & x_1(1-\frac{Z_n}{n+1}) \\ 0 & 1-\frac{Z_n}{n+1} \end{bmatrix},$$

$$b^{(n)} = \begin{pmatrix} x_1 \frac{Z_n}{n+1} \ln\left(\frac{Z_n}{n+1}\right) + (1+x_1)\left(1-\frac{Z_n}{n+1}\right) \ln\left(1-\frac{Z_n}{n+1}\right) + \frac{Z_n}{n+1}\Big)\gamma + o(1) \\ 1 + 2\frac{Z_n}{n+1} \ln\left(\frac{Z_n}{n+1}\right) + 2\left(1-\frac{Z_n}{n+1}\right) \ln\left(1-\frac{Z_n}{n+1}\right) + o(1) \end{pmatrix}$$

,

D'aprés le T.C.D, on

Lemme

$$\frac{Z_n}{n+1}\ln\left(\frac{Z_n}{n+1}\right) \xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{L^2} x_1 \ln x_1, \ \left(1-\frac{Z_n}{n+1}\right)\ln\left(1-\frac{Z_n}{n+1}\right) \xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{L^2} (1-x_1)\ln(1-x_1).$$

Donc, on conclut

$$A_1^{(n)} \xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{L^2} A_1^* := \begin{bmatrix} x_1^2 & 0 \\ 0 & x_1 \end{bmatrix},$$

$$A_1^{(n)} \xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{L^2} A_2^* := \begin{bmatrix} (1-x_1)^2 & x_1(1-x_1) \\ 0 & 1-x_1 \end{bmatrix},$$

$$b^{(n)} \xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{L^2} b^* := \begin{pmatrix} x_1^2 \ln x_1 + (1-x_1^2)\ln(1-x_1) + x_1 \\ 1 + 2x_1 \ln x_1 + 2(1-x_1)\ln(1-x_1) \end{pmatrix}.$$

$$\mathbb{E}||(A_1^*)^t A_1^*||_{op} + \mathbb{E}||(A_2^*)^t A_2^*||_{op} = \frac{29}{60}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{8}\ln\left(\sqrt{2} - 1\right) < 1.$$

$$\mathbb{E}\left[1_{\{I_r^{(n)} \leq l\} \cup \{I_n^{(n)} = n\}} \left|\left|A_r^{(n)}\right|\right|_{op}^2\right] \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} 0,$$

car

$$\mathbb{P}\Big(\{I_n \leq l\} \cup \{I_n = n\}\Big) = \mathbb{P}\Big(\{J_n \leq l\} \cup \{J_n = n\} \leq \frac{l+1}{n}\Big) \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0,$$

Théorème

Soit $(T_n,\ E_n)$ le vecteur aléatoire contenant le poids total et la longueur cheminement externe dans un ABR de taille n, on a,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[T_n] &= (n+1)(h_{n+1}-1),\\
\mathbb{V}ar[T_n] &\sim \frac{10\pi^2-63}{54}n^2,\\
Cov(T_n,\ E_n) &\sim \frac{42-4\pi^2}{9}n^2,\\
Cor(T_n,\ E_n) &\sim \frac{\sqrt{2}(42-4\pi^2)}{\sqrt{(10\pi^2-63)(21-2\pi^2)}},\\
\left(\frac{T_n-\mathbb{E}[T_n]}{n+1},\ \frac{E_n-\mathbb{E}[E_n]}{n+1}\right) &\xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{\mathcal{L}} (T,\ E),
\end{aligned}$$

où $\mathcal{L}(T,\ E)$ est l'unique point fixe de l'opérateur :

$$\begin{aligned}
T:\quad \mathcal{M}_2^2(0) &\longrightarrow \mathcal{M}_2^2(0)\\
\mu &\longmapsto \mathcal{L}\Big(A_1^*(Z_1,\ Z_2)+A_2^*(Z_1',\ Z_2')+b^*\Big).
\end{aligned}$$

où $(Z_1,\ Z_2)$, $(Z_1',\ Z_2')$, x_1 sont indépendantes avec $\mathcal{L}(Z_1,\ Z_2)=\mathcal{L}(Z_1',\ Z_2')=\mu$.

D'aprés inégualité de Chebychev, on conclut

Corollaire

$$\frac{T_n}{n \ln n} \xrightarrow[n \longrightarrow \infty]{\mathbb{P}} 1.$$

D'aprés inégualité de Chebychev, on conclut

Corollaire

$$\frac{T_n}{n \ln n} \xrightarrow[n \longrightarrow \infty]{\mathbb{P}} 1.$$

Plan de la présentation

Résultats obtenus

Proposition

$$\begin{cases} W_1(n) \stackrel{\mathcal{L}}{=} x_1 + x_1 W_1(Z_n - 1), & (n \geq 1) \\ W_1(0) = 0. \end{cases}$$

Théorème

Soit $W_1(n)$ le poids des parcours tout à gauche dans un ABR construit à partir de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i.i.d selon la loi $\mathcal{U}[0, 1]$ On a

$$\mathbb{E}[W_1(n)] \sim 1,$$

$$W_1(n) \xrightarrow[n \longrightarrow \infty]{\mathcal{L}} 1 + X,$$

où X suit la loi de Dickman , dont sa fonction caractéristique est définie par :

$$\psi_X(v) = exp\Big(\int_0^1 \frac{e^{iuv} - 1 - iuv}{u} dv \Big).$$

Résultats obtenus

Proposition

$$\begin{cases} W_1(n) \overset{\mathcal{L}}{=} x_1 + x_1 W_1(Z_n - 1), & (n \geq 1) \\ W_1(0) = 0. \end{cases}$$

Théorème

Soit $W_1(n)$ le poids des parcours tout à gauche dans un ABR construit à partir de $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ i.i.d selon la loi $\mathcal{U}[0,\ 1]$ On a

$$\mathbb{E}[W_1(n)] \sim 1,$$

$$W_1(n) \xrightarrow[n \longrightarrow \infty]{\mathcal{L}} 1 + X,$$

où X suit la loi de Dickman , dont sa fonction caractéristique est définie par :

$$\psi_X(v) = exp\Big(\int_0^1 \frac{e^{iuv} - 1 - iuv}{u} dv \Big).$$

Résultats obtenus

Proposition

$$\begin{cases} W_1(n) \stackrel{\mathcal{L}}{=} x_1 + x_1 W_1(Z_n - 1), & (n \geq 1) \\ W_1(0) = 0. \end{cases}$$

Théorème

Soit $W_1(n)$ le poids des parcours tout à gauche dans un ABR construit à partir de $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ i.i.d selon la loi $\mathcal{U}[0,\ 1]$ On a

$$\mathbb{E}[W_1(n)] \sim 1,$$

$$W_1(n) \xrightarrow[n \longrightarrow \infty]{\mathcal{L}} 1 + X,$$

où X suit la loi de Dickman , dont sa fonction caractéristique est définie par :

$$\psi_X(v) = exp\Big(\int_0^1 \frac{e^{iuv} - 1 - iuv}{u} dv \Big).$$

Résultats connus

Soit S_n la profondeur de la feuille numéro $(n+1)$, vérifie la récursion

$$\begin{cases} S_n \stackrel{\mathcal{L}}{=} 1 + S_{n-Z_n}, & (n \geq 1) \\ S_0 = 0. \end{cases}$$

Théoème (Devroye 1988)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_n] &\sim \ln n, \\ \mathbb{V}ar[S_n] &\sim \ln n, \\ \frac{S_n - \ln n}{\sqrt{\ln n}} &\xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,\ 1). \end{aligned}$$

Résultats connus

Soit S_n la profondeur de la feuille numéro $(n+1)$, vérifie la récursion

$$\begin{cases} S_n \stackrel{\mathcal{L}}{=} 1 + S_{n-Z_n}, & (n \geq 1) \\ S_0 = 0. \end{cases}$$

Théoème (Devroye 1988)

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}[S_n] & \sim & \ln n, \\ \mathbb{V}ar[S_n] & \sim & \ln n, \\ \dfrac{S_n - \ln n}{\sqrt{\ln n}} & \xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{\mathcal{L}} & \mathcal{N}(0,\ 1). \end{array}$$

Résultats obtenus

Proposition

$$\begin{cases} W_{n+1}(n) \stackrel{\mathcal{L}}{=} x_1 + (1-x_1)W_{n+1}(n-Z_n) + x_1 S_{n-Z_n}, & (n \geq 1) \\ W_{n+1}(0) = 0. \end{cases}$$

Théorème

Soit $Y_n := (W_{n+1}(n),\ S_n)$ le veteur aléatoire contenant le poids et la longueur des parcours tout à droite dans un ABR construit à partir de $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ i.i.d uniforme sur $[0,\ 1]$. On a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[W_{n+1}(n)] &\sim \ln n, \\ \mathbb{V}ar[W_{n+1}(n)] &\sim \ln n, \\ \left(\frac{W_{n+1}(n)-\ln n}{\sqrt{\ln n}},\ \frac{S_n-\ln n}{\sqrt{\ln n}}\right) &\xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{\mathcal{L}} (W,\ S), \end{aligned}$$

où $\mathcal{L}(W,\ S)$ est l'unique point fixe de $T : \mathcal{M}_2^2(0) \longrightarrow \mathcal{M}_2^2(0)$ donnée pour $\nu \in \mathcal{M}_2^2(0)$ par

$$T(\nu) := \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1-x_1 & x_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} W \\ S \end{pmatrix} \right),$$

où $\nu = \mathcal{L}(W,\ S)$.

Théorème

Soit $Y_n := (W_{n+1}(n),\ S_n)$ le veteur aléatoire contenant le poids et la longueur des parcours tout à droite dans un ABR construit à partir de $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ i.i.d uniforme sur $[0,\ 1]$. On a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[W_{n+1}(n)] &\sim \ln n, \\ \mathbb{V}ar[W_{n+1}(n)] &\sim \ln n, \\ \left(\frac{W_{n+1}(n)-\ln n}{\sqrt{\ln n}},\ \frac{S_n-\ln n}{\sqrt{\ln n}}\right) &\xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{\mathcal{L}} (W,\ S), \end{aligned}$$

où $\mathcal{L}(W,\ S)$ est l'unique point fixe de $T : \mathcal{M}_2^2(0) \longrightarrow \mathcal{M}_2^2(0)$ donnée pour $\nu \in \mathcal{M}_2^2(0)$ par

$$T(\nu) := \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1-x_1 & x_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} W \\ S \end{pmatrix}\right),$$

où $\nu = \mathcal{L}(W,\ S)$.

Théorème

Soit $Y_n := (W_{n+1}(n),\ S_n)$ le veteur aléatoire contenant le poids et la longueur des parcours tout à droite dans un ABR construit à partir de $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ i.i.d uniforme sur $[0,\ 1]$. On a

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}[W_{n+1}(n)] & \sim & \ln n, \\ \mathbb{V}ar[W_{n+1}(n)] & \sim & \ln n, \\ \left(\dfrac{W_{n+1}(n)-\ln n}{\sqrt{\ln n}},\ \dfrac{S_n-\ln n}{\sqrt{\ln n}}\right) & \xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{\mathcal{L}} & (W,\ S), \end{array}$$

où $\mathcal{L}(W,\ S)$ est l'unique point fixe de $T : \mathcal{M}_2^2(0) \longrightarrow \mathcal{M}_2^2(0)$ donnée pour $\nu \in \mathcal{M}_2^2(0)$ par

$$T(\nu) := \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1-x_1 & x_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} W \\ S \end{pmatrix}\right),$$

où $\nu = \mathcal{L}(W,\ S)$.

Théorème

Soit $Y_n := (W_{n+1}(n),\ S_n)$ le veteur aléatoire contenant le poids et la longueur des parcours tout à droite dans un ABR construit à partir de $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ i.i.d uniforme sur $[0,\ 1]$. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[W_{n+1}(n)] &\sim \ln n,\\
\mathbb{V}ar[W_{n+1}(n)] &\sim \ln n,\\
\left(\frac{W_{n+1}(n)-\ln n}{\sqrt{\ln n}},\ \frac{S_n-\ln n}{\sqrt{\ln n}}\right) &\xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{\mathcal{L}} (W,\ S),
\end{aligned}$$

où $\mathcal{L}(W,\ S)$ est l'unique point fixe de $T : \mathcal{M}_2^2(0) \longrightarrow \mathcal{M}_2^2(0)$ donnée pour $\nu \in \mathcal{M}_2^2(0)$ par

$$T(\nu) := \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1-x_1 & x_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} W \\ S \end{pmatrix} \right),$$

où $\nu = \mathcal{L}(W,\ S)$.

- On s'intéresse à l'étude du poids d'un parcours choisi d'une façon aléatoire,
- On s'intéresse à déterminer le minimum des poids et le maximum des poids
- Poids d'un parcours qui relie deux noeuds choisi aléatoirement dans l'ABR.

- On s'intéresse à l'étude du poids d'un parcours choisi d'une façon aléatoire,
- On s'intéresse à déterminer le minimum des poids et le maximum des poids
- Poids d'un parcours qui relie deux noeuds choisi aléatoirement dans l'ABR.

- On s'intéresse à l'étude du poids d'un parcours choisi d'une façon aléatoire,
- On s'intéresse à déterminer le minimum des poids et le maximum des poids
- Poids d'un parcours qui relie deux noeuds choisi aléatoirement dans l'ABR.

Merci pour votre attention.