Urnes de Pólya non équilibrées

Rafik Aguech Selmi Olfa

Faculté des Sciences de Monastir

18 mars 2014

Plan de la présentation

Plan de la présentation

Modéle générale :

une urne qui contient initialement W_0 boules blanches et B_0 boules noires.

Soient $(m,\ a,\ b) \in \mathbb{N}^{*2},\ a \neq b,\ W_0 + B_0 > m$ et $\alpha \in (0, 1)$.

- Tirage simultané de m boules : l boules blanches et $m - l$ boules noires.
- Remettre les boules tirées dans l'urne
- Ajouter, en plus, $a\Big(\alpha l + (1-\alpha)(m-l)\Big)$ boules blanches et $b\Big((1-\alpha)l + \alpha(m-l)\Big)$ boules noires.
- Itérer cette opération...

Notations :

- W_n le nombre de boules blanches dans l'urne aprés n tirages.
- T_n le nombre de boules totales dans l'urne aprés n tirages.
- $Z_n = \frac{W_n}{T_n}$ la proportion de boules blanches dans l'urne aprés n tirages.

Modéle générale :

une urne qui contient initialement W_0 boules blanches et B_0 boules noires.

Soient $(m,\ a,\ b) \in \mathbb{N}^{*2},\ a \neq b,\ W_0 + B_0 > m$ et $\alpha \in (0, 1)$.

- Tirage simultané de m boules : l boules blanches et $m - l$ boules noires.
- Remettre les boules tirées dans l'urne
- Ajouter, en plus, $a\Big(\alpha l + (1-\alpha)(m-l)\Big)$ boules blanches et $b\Big((1-\alpha)l + \alpha(m-l)\Big)$ boules noires.
- Itérer cette opération...

Notations :

- W_n le nombre de boules blanches dans l'urne aprés n tirages.
- T_n le nombre de boules totales dans l'urne aprés n tirages.
- $Z_n = \frac{W_n}{T_n}$ la proportion de boules blanches dans l'urne aprés n tirages.

Modéle générale :

une urne qui contient initialement W_0 boules blanches et B_0 boules noires.

Soient $(m,\ a,\ b) \in \mathbb{N}^{*2},\ a \neq b,\ W_0 + B_0 > m$ et $\alpha \in (0,1)$.

- Tirage simultané de m boules : l boules blanches et $m-l$ boules noires.
- Remettre les boules tirées dans l'urne
- Ajouter, en plus, $a\Big(\alpha l + (1-\alpha)(m-l)\Big)$ boules blanches et $b\Big((1-\alpha)l + \alpha(m-l)\Big)$ boules noires.
- Itérer cette opération...

Notations :

- W_n le nombre de boules blanches dans l'urne aprés n tirages.
- T_n le nombre de boules totales dans l'urne aprés n tirages.
- $Z_n = \frac{W_n}{T_n}$ la proportion de boules blanches dans l'urne aprés n tirages.

Modéle générale :

une urne qui contient initialement W_0 boules blanches et B_0 boules noires.

Soient $(m,\ a,\ b) \in \mathbb{N}^{*2},\ a \neq b,\ W_0 + B_0 > m$ et $\alpha \in (0,1)$.

- Tirage simultané de m boules : l boules blanches et $m - l$ boules noires.
- Remettre les boules tirées dans l'urne
- Ajouter, en plus, $a\Big(\alpha l + (1-\alpha)(m-l)\Big)$ boules blanches et $b\Big((1-\alpha)l + \alpha(m-l)\Big)$ boules noires.
- Itérer cette opération...

Notations :

- W_n le nombre de boules blanches dans l'urne aprés n tirages.
- T_n le nombre de boules totales dans l'urne aprés n tirages.
- $Z_n = \frac{W_n}{T_n}$ la proportion de boules blanches dans l'urne aprés n tirages.

Modéle générale :

une urne qui contient initialement W_0 boules blanches et B_0 boules noires.

Soient $(m,\ a,\ b) \in \mathbb{N}^{*2},\ a \neq b,\ W_0 + B_0 > m$ et $\alpha \in (0, 1)$.

- Tirage simultané de m boules : l boules blanches et $m - l$ boules noires.
- Remettre les boules tirées dans l'urne
- Ajouter, en plus, $a\Big(\alpha l + (1-\alpha)(m-l)\Big)$ boules blanches et $b\Big((1-\alpha)l + \alpha(m-l)\Big)$ boules noires.
- Itérer cette opération...

Notations :

- W_n le nombre de boules blanches dans l'urne aprés n tirages.
- T_n le nombre de boules totales dans l'urne aprés n tirages.
- $Z_n = \frac{W_n}{T_n}$ la proportion de boules blanches dans l'urne aprés n tirages.

Modéle générale :

une urne qui contient initialement W_0 boules blanches et B_0 boules noires.

Soient $(m,\ a,\ b) \in \mathbb{N}^{*2},\ a \neq b,\ W_0 + B_0 > m$ et $\alpha \in (0, 1)$.

- Tirage simultané de m boules : l boules blanches et $m - l$ boules noires.
- Remettre les boules tirées dans l'urne
- Ajouter, en plus, $a\Big(\alpha l + (1-\alpha)(m-l)\Big)$ boules blanches et $b\Big((1-\alpha)l + \alpha(m-l)\Big)$ boules noires.
- Itérer cette opération...

Notations :

- W_n le nombre de boules blanches dans l'urne aprés n tirages.
- T_n le nombre de boules totales dans l'urne aprés n tirages.
- $Z_n = \frac{W_n}{T_n}$ la proportion de boules blanches dans l'urne aprés n tirages.

Modéle générale :

une urne qui contient initialement W_0 boules blanches et B_0 boules noires.

Soient $(m,\ a,\ b) \in \mathbb{N}^{*2},\ a \neq b,\ W_0 + B_0 > m$ et $\alpha \in (0, 1)$.

- Tirage simultané de m boules : l boules blanches et $m - l$ boules noires.
- Remettre les boules tirées dans l'urne
- Ajouter, en plus, $a\Big(\alpha l + (1-\alpha)(m-l)\Big)$ boules blanches et $b\Big((1-\alpha)l + \alpha(m-l)\Big)$ boules noires.
- Itérer cette opération...

Notations :

- W_n le nombre de boules blanches dans l'urne aprés n tirages.
- T_n le nombre de boules totales dans l'urne aprés n tirages.
- $Z_n = \frac{W_n}{T_n}$ la proportion de boules blanches dans l'urne aprés n tirages.

Modéle générale :

une urne qui contient initialement W_0 boules blanches et B_0 boules noires.

Soient $(m,\ a,\ b) \in \mathbb{N}^{*2},\ a \neq b,\ W_0 + B_0 > m$ et $\alpha \in (0, 1)$.

- Tirage simultané de m boules : l boules blanches et $m - l$ boules noires.
- Remettre les boules tirées dans l'urne
- Ajouter, en plus, $a\Big(\alpha l + (1-\alpha)(m-l)\Big)$ boules blanches et $b\Big((1-\alpha)l + \alpha(m-l)\Big)$ boules noires.
- Itérer cette opération...

Notations :

- W_n le nombre de boules blanches dans l'urne aprés n tirages.
- T_n le nombre de boules totales dans l'urne aprés n tirages.
- $Z_n = \frac{W_n}{T_n}$ la proportion de boules blanches dans l'urne aprés n tirages.

Plan de la présentation

Espace filtré : $\left(\Omega,\ \mathcal{F},\ (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0},\ \mathbf{P}\right)$. Algorithme stocastique :

$$Z_{n+1} = Z_n + \gamma_{n+1}\left(h(Z_n) + \Delta M_{n+1} + r_{n+1}\right)$$

- $h : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ continue, localement liptchitzienne.
- $(\Delta M_n)_n$ un $(\mathcal{F}_n)_n$ différence de martingale.
- $(r_n)_n$ $(\mathcal{F}_n)_n$ adapté.
- (γ_n) suite positive $(\mathcal{F}_n)_n$ adaptée.

Théorème (M. Duflo 1997)

Si

- $\sum_n \gamma_n = +\infty,\ \sum_n \gamma_n^2 < \infty,\ \eta :$ point fixe stable de h.
- $r_n \xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{p.s} 0,\ \sup_n \mathbf{E}\left[\Delta M_{n+1}^2/\mathcal{F}_n\right] < +\infty$ ps,

alors

$$Z_n \xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{p.s} \eta.$$

Espace filtré : $\left(\Omega,\ \mathcal{F},\ (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0},\ \mathbf{P}\right)$. Algorithme stocastique :

$$Z_{n+1} = Z_n + \gamma_{n+1}\Big(h(Z_n) + \Delta M_{n+1} + r_{n+1}\Big)$$

- $h : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ continue, localement liptchitzienne.
- $(\Delta M_n)_n$ un $(\mathcal{F}_n)_n$ différence de martingale.
- $(r_n)_n$ $(\mathcal{F}_n)_n$ adapté.
- (γ_n) suite positive $(\mathcal{F}_n)_n$ adaptée.

Théorème (M. Duflo 1997)

Si

- $\sum_n \gamma_n = +\infty,\ \sum_n \gamma_n^2 < \infty,\ \eta :$ point fixe stable de h.
- $r_n \xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{p.s} 0,\ \sup_n \mathbf{E}\left[\Delta M_{n+1}^2/\mathcal{F}_n\right] < +\infty$ ps,

alors

$$Z_n \xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{p.s} \eta.$$

Espace filtré : $\Big(\Omega,\ \mathcal{F},\ (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0},\ \mathbf{P}\Big)$. Algorithme stocastique :

$$Z_{n+1} = Z_n + \gamma_{n+1}\Big(h(Z_n) + \Delta M_{n+1} + r_{n+1}\Big)$$

- $h : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ continue, localement liptchitzienne.
- $(\Delta M_n)_n$ un $(\mathcal{F}_n)_n$ différence de martingale.
- $(r_n)_n$ $(\mathcal{F}_n)_n$ adapté.
- (γ_n) suite positive $(\mathcal{F}_n)_n$ adaptée.

Théorème (M. Duflo 1997)

Si

- $\sum_n \gamma_n = +\infty,\ \sum_n \gamma_n^2 < \infty,\ \eta :$ point fixe stable de h.
- $r_n \underset{n\longrightarrow\infty}{\xrightarrow{p.s}} 0,\ \sup_n \mathbf{E}\Big[\Delta M_{n+1}^2/\mathcal{F}_n\Big] < +\infty$ ps,

alors

$$Z_n \underset{n\longrightarrow\infty}{\xrightarrow{p.s}} \eta.$$

Espace filtré : $\left(\Omega,\ \mathcal{F},\ (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0},\ \mathbf{P}\right)$. Algorithme stocastique :

$$Z_{n+1} = Z_n + \gamma_{n+1}\left(h(Z_n) + \Delta M_{n+1} + r_{n+1}\right)$$

- $h : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ continue, localement liptchitzienne.
- $(\Delta M_n)_n$ un $(\mathcal{F}_n)_n$ différence de martingale.
- $(r_n)_n$ $(\mathcal{F}_n)_n$ adapté.
- (γ_n) suite positive $(\mathcal{F}_n)_n$ adaptée.

Théorème (M. Duflo 1997)

Si

- $\sum_n \gamma_n = +\infty,\ \sum_n \gamma_n^2 < \infty,\ \eta :$ point fixe stable de h.
- $r_n \xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{p.s} 0,\ \sup_n \mathbf{E}\left[\Delta M_{n+1}^2/\mathcal{F}_n\right] < +\infty$ ps,

alors

$$Z_n \xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{p.s} \eta.$$

Plan de la présentation

Modéle

On suppose que $\alpha = 1$.

- Au tirage n : ξ_n boules blanches et $m - \xi_n$ boules noires.
- Remettre les boules tirées dans l'urne
- Ajouter, en plus, $a\xi_n$ boules blanches et $b(m - \xi_n)$ boules noires.
- Itérer cette opération...

$$\xi_{n+1} \overset{\mathcal{L}}{=} \mathcal{H}(T_n, m, W_n).$$

Evolution de l'urne

$$\begin{aligned} W_{n+1} &= W_n + a\xi_{n+1} \\ T_{n+1} &= T_n + bmn + (a-b)\xi_{n+1} \end{aligned}$$

Modéle

On suppose que $\alpha = 1$.

- Au tirage n : ξ_n boules blanches et $m - \xi_n$ boules noires.
- Remettre les boules tirées dans l'urne
- Ajouter, en plus, $a\xi_n$ boules blanches et $b(m - \xi_n)$ boules noires.
- Itérer cette opération...

$$\xi_{n+1} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \mathcal{H}(T_n,\ m,\ W_n).$$

Evolution de l'urne

$$\begin{aligned} W_{n+1} &= W_n + a\xi_{n+1} \\ T_{n+1} &= T_n + bmn + (a-b)\xi_{n+1} \end{aligned}$$

Modéle

On suppose que $\alpha = 1$.

- Au tirage n : ξ_n boules blanches et $m - \xi_n$ boules noires.
- Remettre les boules tirées dans l'urne
- Ajouter, en plus, $a\xi_n$ boules blanches et $b(m - \xi_n)$ boules noires.
- Itérer cette opération...

$$\xi_{n+1} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \mathcal{H}(T_n, m, W_n).$$

Evolution de l'urne

$$\begin{aligned} W_{n+1} &= W_n + a\xi_{n+1} \\ T_{n+1} &= T_n + bmn + (a-b)\xi_{n+1} \end{aligned}$$

Modéle

On suppose que $\alpha = 1$.

- Au tirage n : ξ_n boules blanches et $m - \xi_n$ boules noires.
- Remettre les boules tirées dans l'urne
- Ajouter, en plus, $a\xi_n$ boules blanches et $b(m - \xi_n)$ boules noires.
- Itérer cette opération...

$$\xi_{n+1} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \mathcal{H}(T_n, m, W_n).$$

Evolution de l'urne

$$\begin{aligned} W_{n+1} &= W_n + a\xi_{n+1} \\ T_{n+1} &= T_n + bmn + (a-b)\xi_{n+1} \end{aligned}$$

Modéle

On suppose que $\alpha = 1$.

- Au tirage n : ξ_n boules blanches et $m - \xi_n$ boules noires.
- Remettre les boules tirées dans l'urne
- Ajouter, en plus, $a\xi_n$ boules blanches et $b(m - \xi_n)$ boules noires.
- Itérer cette opération...

$$\xi_{n+1} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \mathcal{H}(T_n, m, W_n).$$

Evolution de l'urne

$$\begin{aligned} W_{n+1} &= W_n + a\xi_{n+1} \\ T_{n+1} &= T_n + bmn + (a-b)\xi_{n+1} \end{aligned}$$

Modéle

On suppose que $\alpha = 1$.

- Au tirage n : ξ_n boules blanches et $m - \xi_n$ boules noires.
- Remettre les boules tirées dans l'urne
- Ajouter, en plus, $a\xi_n$ boules blanches et $b(m - \xi_n)$ boules noires.
- Itérer cette opération...

$$\xi_{n+1} \overset{\mathcal{L}}{=} \mathcal{H}(T_n,\ m,\ W_n).$$

Evolution de l'urne

$$\begin{aligned} W_{n+1} &= W_n + a\xi_{n+1} \\ T_{n+1} &= T_n + bmn + (a-b)\xi_{n+1} \end{aligned}$$

Modéle

On suppose que $\alpha = 1$.

- Au tirage n : ξ_n boules blanches et $m - \xi_n$ boules noires.
- Remettre les boules tirées dans l'urne
- Ajouter, en plus, $a\xi_n$ boules blanches et $b(m - \xi_n)$ boules noires.
- Itérer cette opération...

$$\xi_{n+1} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \mathcal{H}(T_n,\ m,\ W_n).$$

Evolution de l'urne

$$\begin{aligned} W_{n+1} &= W_n + a\xi_{n+1} \\ T_{n+1} &= T_n + bmn + (a-b)\xi_{n+1} \end{aligned}$$

Modéle

On suppose que $\alpha = 1$.

- Au tirage n : ξ_n boules blanches et $m - \xi_n$ boules noires.
- Remettre les boules tirées dans l'urne
- Ajouter, en plus, $a\xi_n$ boules blanches et $b(m - \xi_n)$ boules noires.
- Itérer cette opération...

$$\xi_{n+1} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \mathcal{H}(T_n,\ m,\ W_n).$$

Evolution de l'urne

$$\begin{aligned} W_{n+1} &= W_n + a\xi_{n+1} \\ T_{n+1} &= T_n + bmn + (a-b)\xi_{n+1} \end{aligned}$$

Historique

$a = b$, Chen et Kuba (2011) :

- Expressions exactes de moments d'ordre 1 et 2 de W_n
- structures des moments d'ordre supérieures

Urne de Friedman : le cas $m = 1$.
Urne de Polya originale : $m = a = b = 1$.

Historique

$a = b$, Chen et Kuba (2011) :

- Expressions exactes de moments d'ordre 1 et 2 de W_n
- structures des moments d'ordre supérieures

Urne de Friedman : le cas $m = 1$.
Urne de Polya originale : $m = a = b = 1$.

Historique

$a = b$, Chen et Kuba (2011) :

- Expressions exactes de moments d'ordre 1 et 2 de W_n
- structures des moments d'ordre supérieures

Urne de Friedman : le cas $m = 1$.

Urne de Polya originale : $m = a = b = 1$.

Historique

$a = b$, Chen et Kuba (2011) :

- Expressions exactes de moments d'ordre 1 et 2 de W_n
- structures des moments d'ordre supérieures

Urne de Friedman : le cas $m = 1$.
Urne de Polya originale : $m = a = b = 1$.

Algorithme stochastique en Z_n

Soient

$$
\begin{aligned}
Y_{n+1} &= \Big(a-(a-b)Z_n\Big)\xi_{n+1} - bmZ_n \\
g(x) &= m(b-a)x(x-1) \\
\gamma_n &= \frac{1}{T_n} \\
\Delta M_{n+1} &= Y_{n+1} - E[Y_{n+1}] \\
Z_{n+1} - Z_n &= \gamma_{n+1} g(Z_n) + \gamma_{n+1}\Delta M_{n+1}
\end{aligned}
$$

g est continue liptchitzienne.

$$
\begin{aligned}
\sum_n \gamma_n &= +\infty \\
\sum_n \gamma_n^2 &< \infty \\
sup_n E\left[\Delta M_{n+1}^2/\mathcal{F}_n\right] &< 4m^2(2a+b)^2 < \infty.
\end{aligned}
$$

Algorithme stochastique en Z_n

Soient

$$\begin{aligned}
Y_{n+1} &= \Big(a-(a-b)Z_n\Big)\xi_{n+1} - bmZ_n \\
g(x) &= m(b-a)x(x-1) \\
\gamma_n &= \frac{1}{T_n} \\
\Delta M_{n+1} &= Y_{n+1} - E[Y_{n+1}] \\
Z_{n+1} - Z_n &= \gamma_{n+1}g(Z_n) + \gamma_{n+1}\Delta M_{n+1}
\end{aligned}$$

g est continue liptchitzienne.

$$\begin{aligned}
\sum_n \gamma_n &= +\infty \\
\sum_n \gamma_n^2 &< \infty \\
sup_n E\Big[\Delta M_{n+1}^2/\mathcal{F}_n\Big] &< 4m^2(2a+b)^2 < \infty.
\end{aligned}$$

Théorème

Soit $Z_n = \frac{W_n}{T_n}$. On a

- Si $a < b$, Z_n converge presque sûrement vers 0.
- Si $a > b$, Z_n converge presque sûrement vers 1.

Théorème

Soit $Z_n = \frac{W_n}{T_n}$. On a

- Si $a < b$, Z_n converge presque sûrement vers 0.
- Si $a > b$, Z_n converge presque sûrement vers 1.

proposition

On a, presque surement

- Si $a < b$, $\frac{W_n}{n} \xrightarrow[n \longrightarrow \infty]{p.s} 0$ et $\frac{T_n}{n} \xrightarrow[n \longrightarrow \infty]{p.s} bm$.
- Si $a > b$, $\frac{W_n}{n} \xrightarrow[n \longrightarrow \infty]{p.s} am$ et $\frac{T_n}{n} \xrightarrow[n \longrightarrow \infty]{p.s} am$.

Idée de la preuve

$$
\begin{aligned}
W_n &= W_0 + a\sum_{k=1}^{n}\xi_k \\
&= W_0 + a\sum_{k=1}^{n}\Big(\xi_k - E(\xi_k/\mathcal{F}_{k-1})\Big) + a\sum_{k=1}^{n} m\frac{W_{k-1}}{T_{k-1}} \\
T_n &= T_0 + bmn + (a-b)\sum_{k=1}^{n}\Big(\xi_k - m\frac{W_{k-1}}{T_{k-1}}\Big) + m(a-b)\sum_{k=1}^{n}\frac{W_{k-1}}{T_{k-1}}
\end{aligned}
$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Big(\xi_k - E(\xi_k/\mathcal{F}_{k-1})\Big) \xrightarrow[n \longrightarrow \infty]{p.s} 0 \Longleftarrow \text{Martingale}$$

proposition

On a, presque surement

- Si $a < b$, $\frac{W_n}{n} \xrightarrow[n \longrightarrow \infty]{p.s} 0$ et $\frac{T_n}{n} \xrightarrow[n \longrightarrow \infty]{p.s} bm$.
- Si $a > b$, $\frac{W_n}{n} \xrightarrow[n \longrightarrow \infty]{p.s} am$ et $\frac{T_n}{n} \xrightarrow[n \longrightarrow \infty]{p.s} am$.

Idée de la preuve

$$\begin{aligned} W_n &= W_0 + a\sum_{k=1}^{n} \xi_k \\ &= W_0 + a\sum_{k=1}^{n} \Big(\xi_k - E(\xi_k/\mathcal{F}_{k-1})\Big) + a\sum_{k=1}^{n} m\frac{W_{k-1}}{T_{k-1}} \\ T_n &= T_0 + bmn + (a-b)\sum_{k=1}^{n} \Big(\xi_k - m\frac{W_{k-1}}{T_{k-1}}\Big) + m(a-b)\sum_{k=1}^{n} \frac{W_{k-1}}{T_{k-1}} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \Big(\xi_k - E(\xi_k/\mathcal{F}_{k-1})\Big) \xrightarrow[n \longrightarrow \infty]{p.s} 0 \Longleftarrow \text{Martingale}$$

proposition

On a, presque surement

- Si $a < b$, $\frac{W_n}{n} \xrightarrow[n \longrightarrow \infty]{p.s} 0$ et $\frac{T_n}{n} \xrightarrow[n \longrightarrow \infty]{p.s} bm$.
- Si $a > b$, $\frac{W_n}{n} \xrightarrow[n \longrightarrow \infty]{p.s} am$ et $\frac{T_n}{n} \xrightarrow[n \longrightarrow \infty]{p.s} am$.

Idée de la preuve

$$\begin{aligned} W_n &= W_0 + a \sum_{k=1}^{n} \xi_k \\ &= W_0 + a \sum_{k=1}^{n} \Big(\xi_k - E(\xi_k / \mathcal{F}_{k-1}) \Big) + a \sum_{k=1}^{n} m \frac{W_{k-1}}{T_{k-1}} \\ T_n &= T_0 + bmn + (a-b) \sum_{k=1}^{n} \Big(\xi_k - m \frac{W_{k-1}}{T_{k-1}} \Big) + m(a-b) \sum_{k=1}^{n} \frac{W_{k-1}}{T_{k-1}} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \Big(\xi_k - E(\xi_k / \mathcal{F}_{k-1}) \Big) \xrightarrow[n \longrightarrow \infty]{p.s} 0 \Longleftarrow \text{Martingale}$$

proposition

On a, presque surement

- Si $a < b$, $\frac{W_n}{n} \xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{p.s} 0$ et $\frac{T_n}{n} \xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{p.s} bm$.
- Si $a > b$, $\frac{W_n}{n} \xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{p.s} am$ et $\frac{T_n}{n} \xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{p.s} am$.

Idée de la preuve

$$\begin{aligned}
W_n &= W_0 + a\sum_{k=1}^{n}\xi_k \\
&= W_0 + a\sum_{k=1}^{n}\Big(\xi_k - E(\xi_k/\mathcal{F}_{k-1})\Big) + a\sum_{k=1}^{n} m\frac{W_{k-1}}{T_{k-1}} \\
T_n &= T_0 + bmn + (a-b)\sum_{k=1}^{n}\Big(\xi_k - m\frac{W_{k-1}}{T_{k-1}}\Big) + m(a-b)\sum_{k=1}^{n}\frac{W_{k-1}}{T_{k-1}}
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Big(\xi_k - E(\xi_k/\mathcal{F}_{k-1})\Big) \xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{p.s} 0 \Longleftarrow \text{Martingale}$$

Plan de la présentation

Modèle

$\alpha = 0$. L'urne évolue selon la règle suivante :

$$\left(W_{n+1},\, B_{n+1}\right) = \left(W_n,\, B_n\right) + \left(a(m - \xi_{n+1}),\, b\xi_{n+1}\right).$$

Histotique :

$a = b$, Kuba, Hosam et Panholzer (2013)

- Valeurs exactes de l'espérance et de la variance de W_n
- Un TLC en W_n.

Histotique :

$a = b$, Kuba, Hosam et Panholzer (2013)

- Valeurs exactes de l'espérance et de la variance de W_n
- Un TLC en W_n.

Thórème

Soit $Z_n = \frac{W_n}{T_n}$.

$$\begin{aligned}
Z_n &\xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{p.s} \frac{a-\sqrt{ab}}{a-b} \\
\frac{W_n}{n} &\xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{p.s} \frac{am}{a-b}(\sqrt{ab}-b) \\
\frac{T_n}{n} &\xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{p.s} m\sqrt{ab}
\end{aligned}$$

Remarques

Résultats indépendants de $W_0,\ B_0$

Thórème

Soit $Z_n = \frac{W_n}{T_n}$.

$$
\begin{aligned}
Z_n & \underset{n \longrightarrow \infty}{\overset{p.s}{\longrightarrow}} \frac{a-\sqrt{ab}}{a-b} \\
\frac{W_n}{n} & \underset{n \longrightarrow \infty}{\overset{p.s}{\longrightarrow}} \frac{am}{a-b}(\sqrt{ab}-b) \\
\frac{T_n}{n} & \underset{n \longrightarrow \infty}{\overset{p.s}{\longrightarrow}} m\sqrt{ab}
\end{aligned}
$$

Remarques

Résultats indépendants de $W_0, \ B_0$

Preuve

On a

$$
\begin{aligned}
Z_{n+1} - Z_n &= \frac{1}{T_{n+1}}\Big[am + (a-b)\xi_{n+1}Z_n - a\xi_{n+1} - amZ_n\Big] \\
&= \frac{1}{T_{n+1}}\Big[Y_{n+1}\Big] \\
E\Big(Y_{n+1}/\mathcal{F}_n\Big) &= m(a-b)Z_n^2 - 2amZ_n + am \\
Z_{n+1} - Z_n &= \frac{1}{T_{n+1}}h(Z_n) + \frac{1}{T_{n+1}}\Big(Y_{n+1} - E[Y_{n+1}]\Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
h(x) &= m(a-b)x^2 - 2amx + am \\
\gamma_n &= \frac{1}{T_n},\ \Delta M_{n+1} = Y_{n+1} - E[Y_{n+1}],\ r_n = 0.
\end{aligned}
$$

Théorème générique $\Longrightarrow$ pour conclure.

Preuve

On a

$$\begin{aligned} Z_{n+1} - Z_n &= \frac{1}{T_{n+1}}\Big[am + (a-b)\xi_{n+1}Z_n - a\xi_{n+1} - amZ_n\Big] \\ &= \frac{1}{T_{n+1}}\Big[Y_{n+1}\Big] \\ E\Big(Y_{n+1}/\mathcal{F}_n\Big) &= m(a-b)Z_n^2 - 2amZ_n + am \\ Z_{n+1} - Z_n &= \frac{1}{T_{n+1}}h(Z_n) + \frac{1}{T_{n+1}}\Big(Y_{n+1} - E[Y_{n+1}]\Big) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(x) &= m(a-b)x^2 - 2amx + am \\ \gamma_n &= \frac{1}{T_n},\ \Delta M_{n+1} = Y_{n+1} - E[Y_{n+1}],\ r_n = 0. \end{aligned}$$

Théorème générique $\Longrightarrow$ pour conclure.

Preuve

On a

$$
\begin{aligned}
Z_{n+1} - Z_n &= \frac{1}{T_{n+1}}\left[am + (a-b)\xi_{n+1}Z_n - a\xi_{n+1} - amZ_n\right] \\
&= \frac{1}{T_{n+1}}\left[Y_{n+1}\right] \\
E\left(Y_{n+1}/\mathcal{F}_n\right) &= m(a-b)Z_n^2 - 2amZ_n + am \\
Z_{n+1} - Z_n &= \frac{1}{T_{n+1}}h(Z_n) + \frac{1}{T_{n+1}}\left(Y_{n+1} - E[Y_{n+1}]\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
h(x) &= m(a-b)x^2 - 2amx + am \\
\gamma_n &= \frac{1}{T_n},\ \Delta M_{n+1} = Y_{n+1} - E[Y_{n+1}],\ r_n = 0.
\end{aligned}
$$

Théorème générique $\Longrightarrow$ pour conclure.

Preuve

On a

$$\begin{aligned}
Z_{n+1} - Z_n &= \frac{1}{T_{n+1}}\Big[am + (a-b)\xi_{n+1}Z_n - a\xi_{n+1} - amZ_n\Big] \\
&= \frac{1}{T_{n+1}}\Big[Y_{n+1}\Big] \\
E\Big(Y_{n+1}/\mathcal{F}_n\Big) &= m(a-b)Z_n^2 - 2amZ_n + am \\
Z_{n+1} - Z_n &= \frac{1}{T_{n+1}}h(Z_n) + \frac{1}{T_{n+1}}\Big(Y_{n+1} - E[Y_{n+1}]\Big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h(x) &= m(a-b)x^2 - 2amx + am \\
\gamma_n &= \frac{1}{T_n},\ \Delta M_{n+1} = Y_{n+1} - E[Y_{n+1}],\ r_n = 0.
\end{aligned}$$

Théorème générique $\Longrightarrow$ pour conclure.

Preuve

On a

$$
\begin{aligned}
Z_{n+1} - Z_n &= \frac{1}{T_{n+1}}\Big[am + (a-b)\xi_{n+1}Z_n - a\xi_{n+1} - amZ_n\Big] \\
&= \frac{1}{T_{n+1}}\Big[Y_{n+1}\Big] \\
E\Big(Y_{n+1}/\mathcal{F}_n\Big) &= m(a-b)Z_n^2 - 2amZ_n + am \\
Z_{n+1} - Z_n &= \frac{1}{T_{n+1}}h(Z_n) + \frac{1}{T_{n+1}}\Big(Y_{n+1} - E[Y_{n+1}]\Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
h(x) &= m(a-b)x^2 - 2amx + am \\
\gamma_n &= \frac{1}{T_n},\ \Delta M_{n+1} = Y_{n+1} - E[Y_{n+1}],\ r_n = 0.
\end{aligned}
$$

Théorème générique $\Longrightarrow$ pour conclure.

Moments de W_n

Proposition

Soient $\lambda = \frac{am}{a-b}(\sqrt{ab} - b)$ et $x_1 = \frac{a-\sqrt{ab}}{a-b}$. On a, lorsque n tend vers $+\infty$

$$\begin{aligned} E[W_n] &= \lambda n + o(n) \\ Var[W_n] &= a^2m^2(1 - x_1^2)n^2 + o(n^2). \end{aligned}$$

Plan de la présentation

Théorème de Lindeberg

Théorème

$(M_n,\ \mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ une martingale centrée, $(v_n)_n$ une suite croissante positive. On suppose que, $\forall\, \varepsilon > 0$

- $\frac{1}{v_n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}\left[\Delta M_k^2 \mathbb{I}_{\left\{\frac{\Delta M_k}{v_n}>\varepsilon\right\}}/\mathcal{F}_{k-1}\right] \xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{\mathbf{P}} 0$
- $\frac{1}{v_n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}\left[\Delta M_k^2/\mathcal{F}_{k-1}\right] \xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{\mathbf{P}} Z,$

alors $\frac{M_n}{v_n}$ converge en loi vers la variable aléatoire de fonction caractéristique donnée par $\mathbf{E}\left[\exp\left(\frac{-Zt^2}{2}\right)\right]$.

Soient

$$\begin{aligned}
\varphi_n &= \prod_{k=1}^{n} \frac{T_k}{T_k - am} \\
\lambda_n &= \Big(\sum_{k=1}^{n} \varphi_k^2\Big)^{\frac{1}{2}} \\
N_n &= \varphi_{n-1} W_n - am \sum_{k=1}^{n-1} \varphi_k
\end{aligned}$$

$\Big(N_n - E[N_n],\, \mathcal{F}_n\Big)_n$ martingale centrée.

Conditions de Lindeberg vérifiées $\Longrightarrow$

Théorème

$$\frac{N_n - \mathbf{E}[N_n]}{\lambda_n} \xrightarrow[n \longrightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\Big(0,\, a^2 m x_1 (1 - x_1)\Big)$$

Soient

$$\varphi_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{T_k}{T_k - am}$$

$$\lambda_n = \Big(\sum_{k=1}^{n} \varphi_k^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$N_n = \varphi_{n-1} W_n - am \sum_{k=1}^{n-1} \varphi_k$$

$\Big(N_n - E[N_n],\, \mathcal{F}_n\Big)_n$ martingale centrée.
Conditions de Lindeberg vérifiées $\Longrightarrow$

Théorème

$$\frac{N_n - \mathbf{E}[N_n]}{\lambda_n} \xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\Big(0,\, a^2 m x_1 (1 - x_1)\Big)$$

Soient

$$\varphi_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{T_k}{T_k - am}$$

$$\lambda_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \varphi_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$N_n = \varphi_{n-1} W_n - am \sum_{k=1}^{n-1} \varphi_k$$

$\Big(N_n - E[N_n],\, \mathcal{F}_n\Big)_n$ martingale centrée.
Conditions de Lindeberg vérifiées $\Longrightarrow$

Théorème

$$\frac{N_n - \mathbf{E}[N_n]}{\lambda_n} \xrightarrow[n \longrightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\Big(0,\, a^2 m x_1 (1 - x_1)\Big)$$

Un TLC en $(\xi_n)_n$

$M_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\xi_k - m \frac{W_{k-1}}{T_{k-1}} \right) \Longleftarrow$ Martingale centrée.

Conditions de Lindeberg :

$$\begin{aligned} E\left[\Delta M_n^2 / \mathcal{F}_{n-1}\right] &= m \frac{W_{n-1}}{T_{n-1}} \left(1 - \frac{W_{n-1}}{T_{n-1}}\right) \frac{T_{n-1} - m}{T_{n-1} - 1} \xrightarrow[n \longrightarrow \infty]{ps} m x_1 (1 - x_1) \\ V_n &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} E\left[\Delta M_k^2 / \mathcal{F}_{k-1}\right] \xrightarrow[n \longrightarrow \infty]{ps} m x_1 (1 - x_1) \end{aligned}$$

Théorème

On a

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \left(\xi_k - m \frac{W_{k-1}}{T_{k-1}} \right) \xrightarrow[n \longrightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\Big(0,\ m x_1 (1 - x_1)\Big)$$

Un TLC en $(\xi_n)_n$

$M_n = \sum_{k=1}^n \left(\xi_k - m\frac{W_{k-1}}{T_{k-1}}\right) \Longleftarrow$ Martingale centrée.
Conditions de Lindeberg :

$$E\left[\Delta M_n^2/\mathcal{F}_{n-1}\right] = m\frac{W_{n-1}}{T_{n-1}}\left(1-\frac{W_{n-1}}{T_{n-1}}\right)\frac{T_{n-1}-m}{T_{n-1}-1} \xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{ps} mx_1(1-x_1)$$

$$V_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n E\left[\Delta M_k^2/\mathcal{F}_{k-1}\right] \xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{ps} mx_1(1-x_1)$$

Théorème

On a

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^n\left(\xi_k - m\frac{W_{k-1}}{T_{k-1}}\right) \xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\Big(0,\, mx_1(1-x_1)\Big)$$

Un TLC en $(\xi_n)_n$

$M_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\xi_k - m\frac{W_{k-1}}{T_{k-1}}\right) \Longleftarrow$ Martingale centrée.

Conditions de Lindeberg :

$$E\left[\Delta M_n^2/\mathcal{F}_{n-1}\right] = m\frac{W_{n-1}}{T_{n-1}}\left(1-\frac{W_{n-1}}{T_{n-1}}\right)\frac{T_{n-1}-m}{T_{n-1}-1} \xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{ps} mx_1(1-x_1)$$

$$V_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E\left[\Delta M_k^2/\mathcal{F}_{k-1}\right] \xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{ps} mx_1(1-x_1)$$

Théorème

On a

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\left(\xi_k - m\frac{W_{k-1}}{T_{k-1}}\right) \xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0,\ mx_1(1-x_1)\right)$$

Un TLC en $(\xi_n)_n$

$M_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\xi_k - m\frac{W_{k-1}}{T_{k-1}}\right) \Longleftarrow$ Martingale centrée.

Conditions de Lindeberg :

$$E\left[\Delta M_n^2/\mathcal{F}_{n-1}\right] = m\frac{W_{n-1}}{T_{n-1}}\left(1-\frac{W_{n-1}}{T_{n-1}}\right)\frac{T_{n-1}-m}{T_{n-1}-1} \xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{ps} mx_1(1-x_1)$$

$$V_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E\left[\Delta M_k^2/\mathcal{F}_{k-1}\right] \xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{ps} mx_1(1-x_1)$$

Théorème

On a

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\left(\xi_k - m\frac{W_{k-1}}{T_{k-1}}\right) \xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\Big(0,\, mx_1(1-x_1)\Big)$$

faible dépendance

la dépendance entre les deux familles $(\frac{W_k}{T_k})_{k\leq n}$ et $(\frac{W_l}{T_l})_{l\geq n+m}$ devient faible lorsque m tend vers $+\infty$.

Proposition

On a

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{W_{k-1}}{T_{k-1}}-\mathbf{E}\left(\frac{W_{k-1}}{T_{k-1}}\right)\right]\xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{\mathbf{P}}0$$

faible dépendance

la dépendance entre les deux familles $(\frac{W_k}{T_k})_{k\leq n}$ et $(\frac{W_l}{T_l})_{l\geq n+m}$ devient faible lorsque m tend vers $+\infty$.

Proposition

On a

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{W_{k-1}}{T_{k-1}}-\mathbf{E}\left(\frac{W_{k-1}}{T_{k-1}}\right)\right]\xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{\mathbf{P}} 0$$

Un TLC en $(W_n)_n$

On a

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\Big(W_n - \mathbf{E}[W_n]\Big) = \frac{am}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\left(\mathbf{E}\left[\frac{W_{k-1}}{T_{k-1}}\right] - \frac{W_{k-1}}{T_{k-1}}\right) - \frac{a}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\left(\xi_k - m\frac{W_{k-1}}{T_{k-1}}\right)$$

Théorème

On a

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\Big(W_n - \mathbf{E}[W_n]\Big) \xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\Big(0,\ a^2 m x_1 (1-x_1)\Big)$$

Un TLC en $(W_n)_n$

On a

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\Big(W_n - \mathbf{E}[W_n]\Big) = \frac{am}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\left(\mathbf{E}\left[\frac{W_{k-1}}{T_{k-1}}\right] - \frac{W_{k-1}}{T_{k-1}}\right) - \frac{a}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\left(\xi_k - m\frac{W_{k-1}}{T_{k-1}}\right)$$

Théorème

On a

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\Big(W_n - \mathbf{E}[W_n]\Big) \underset{n\longrightarrow\infty}{\xrightarrow{\mathcal{L}}} \mathcal{N}\Big(0,\, a^2 m x_1(1 - x_1)\Big)$$

Plan de la présentation

- Rendre m aléatoire ! ! ! ! !
- m fixe, $a = b$ mais aléatoire.

- Rendre m aléatoire ! ! ! ! !
- m fixe, $a = b$ mais aléatoire.

MERCI